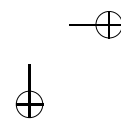
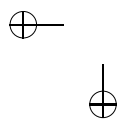
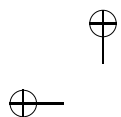


# Grafos – Uma Introdução

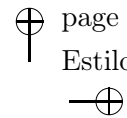
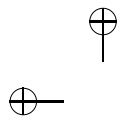
Samuel Jurkiewicz





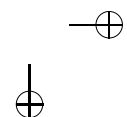
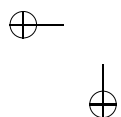
Texto já revisado pela nova ortografia.

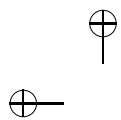




### Sobre o Autor

Samuel Jurkiewicz é carioca e Doutor em Matemática pela Universidade Pierre et Marie, em Paris. Atualmente é professor da Escola de Engenharia da UFRJ. Já atuou como docente em todos os níveis, inclusive no pré-escolar. Além do ensino de graduação e pós-graduação, tem desenvolvido atividades junto a professores e alunos do Ensino Médio através de oficinas de Matemática Discreta.

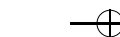
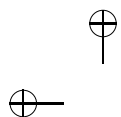




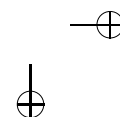
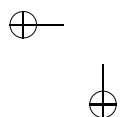
# Sumário

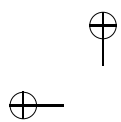
|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>O que é um Grafo?</b>                     | <b>5</b>  |
| 1.1      | Primeiras Noções . . . . .                   | 5         |
| 1.2      | Grau de um Vértice . . . . .                 | 7         |
| 1.3      | Nosso Primeiro Resultado . . . . .           | 10        |
| 1.4      | Alguns Problemas com as Definições . . . . . | 11        |
| 1.5      | Isomorfismo . . . . .                        | 13        |
| 1.6      | Outras Definições . . . . .                  | 16        |
| 1.7      | Tipos Especiais de Grafos . . . . .          | 17        |
| 1.8      | Representação por Matrizes . . . . .         | 22        |
| <b>2</b> | <b>Ciclos e Caminhos</b>                     | <b>28</b> |
| 2.1      | Conexidade Outra Vez . . . . .               | 28        |
| 2.2      | O Problema do Menor Caminho . . . . .        | 31        |
|          | Algoritmos e Computadores . . . . .          | 31        |
|          | Qual o Menor Caminho até a Escola? . . . . . | 32        |
| <b>3</b> | <b>Mais Ciclos e mais Caminhos</b>           | <b>45</b> |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.1      | Euler e as Pontes de Königsberg . . . . .       | 45        |
|          | Esse Problema é Importante? . . . . .           | 47        |
| 3.2      | Estrutura de Dados . . . . .                    | 48        |
| 3.3      | Grafos Eulerianos . . . . .                     | 51        |
| 3.4      | O Problema Chinês do Carteiro . . . . .         | 57        |
| 3.5      | Grafos e Ciclos Hamiltonianos . . . . .         | 58        |
| 3.6      | O Problema do Caixeiro Viajante – PCV . . . . . | 59        |
| 3.7      | Uma Palavra sobre Complexidade . . . . .        | 62        |
| <b>4</b> | <b>Árvores</b>                                  | <b>66</b> |
| 4.1      | Definições e Caracterizações . . . . .          | 66        |
| 4.2      | Árvores Geradoras . . . . .                     | 68        |
|          | O Problema de Conexão de Peso Mínimo . . . . .  | 68        |
| <b>5</b> | <b>Subconjuntos Especiais de um Grafo</b>       | <b>73</b> |
| 5.1      | Conjuntos Independentes . . . . .               | 73        |
| 5.2      | Coloração . . . . .                             | 76        |
| 5.3      | Aplicações de Coloração . . . . .               | 77        |
| 5.4      | Cliques . . . . .                               | 82        |
| 5.5      | Acoplamentos . . . . .                          | 82        |
| 5.6      | Acoplamentos em Grafos Bipartidos . . . . .     | 84        |



|   |            |
|---|------------|
|   | <b>iii</b> |
| 5.7 Coloração de Arestas . . . . .            | 85         |
| 5.8 Outros Subconjuntos . . . . .             | 92         |
| <b>6 Grafos Planares</b>                      | <b>95</b>  |
| 6.1 Definições e Resultados Simples . . . . . | 95         |
| 6.2 Teorema de Kuratowski . . . . .           | 99         |
| 6.3 Dualidade . . . . .                       | 100        |
| 6.4 O Problema das 4 Cores . . . . .          | 101        |
| <b>Índice</b>                                 | <b>111</b> |







# Introdução

O leitor seria capaz de desenhar a figura 1 abaixo sem tirar o lápis do papel? Tem que ir de ponto a ponto e não pode passar pela mesma linha duas vezes.

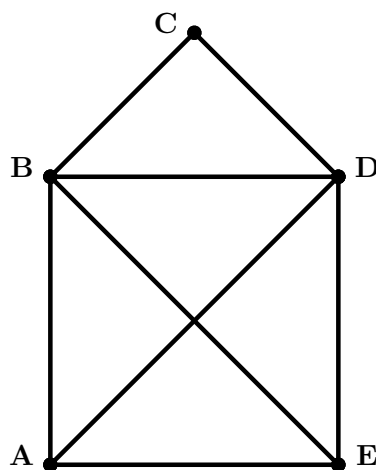


Figura 1

Foi fácil? Experimente agora começar pelo ponto  $B$ .

Bem, esse problema é importante? Pensemos numa pequena cidade com pequeno orçamento. O serviço de recolhimento de lixo é feito por um pequeno caminhão. Queremos evitar o desperdício; uma boa ideia seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada

2

rua e retornar ao ponto de partida. Na verdade, é o mesmo problema.

Um outro problema que propomos às crianças para que se aquietem é o seguinte: temos que ligar Luz, Gás e Telefone a três casas sem que as linhas se cruzem. Você já tentou? (veja a figura 2)

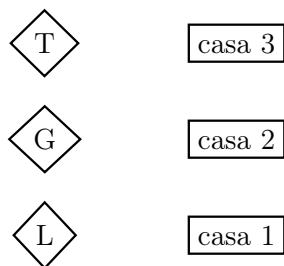


Figura 2

Outra vez, cabe a pergunta: esse problema é importante? Pensemos então numa fábrica de placas de circuito integrado. Encontrar esquemas de ligação que evitem cruzamento é crucial para baratear os custos de manufatura; quanto menos camadas, mais rápido e rentável se torna o serviço.

Nos dois casos só nos interessou considerar um conjunto de pontos e um conjunto de ligações entre eles. É a essa estrutura que chamamos **grafo**.

Estas notas tratam da Teoria dos Grafos – uma modesta introdução. Desde o século XVIII até nossos dias essa teoria tem conhecido extraordinário desenvolvimento teórico e aplicado. Adotamos então

a prática de introduzir alguns temas gerais que dessem uma pequena ideia da variedade de abordagens e problemas que ela pode oferecer. Certamente, muito ficou para depois. O que esperamos é que ao final o leitor tenha se convencido da utilidade dos conceitos e processos apresentados, mas guardamos o secreto desejo de que o aspecto lúdico dos grafos o contaminem com o que costumamos chamar de “graphical disease”, ou melhor, traduzindo, a febre dos grafos.

Uma observação: sendo essa uma primeira abordagem da teoria dos grafos, tratamos aqui apenas de grafos sem orientação. A intenção foi apresentar os conceitos da forma mais simplificada possível. Para o leitor interessado, a bibliografia contempla grafos com orientação.

Cada capítulo é acompanhado de exercícios sem a solução, preferimos deixar o prazer desta tarefa ao leitor. A bibliografia ao fim das notas é mais do que suficiente para adquirir um conhecimento razoável de teoria dos grafos, e inclui trabalhos de nível diversificado.

Enfim, deve haver erros; as críticas (construtivas, por favor) são bem vindas.

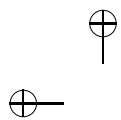
Esperamos que apreciem estas notas.

Samuel Jurkiewicz

Escola de Engenharia/UFRJ – Departamento de Engenharia Industrial

COPPE/UFRJ – Programa de Engenharia de Produção

jurki@pep.ufrj.br



# Capítulo 1

## O que é um Grafo?

### 1.1 Primeiras Noções

Numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas  $6A$ ,  $6B$ ,  $7A$ ,  $7B$ ,  $8A$  e  $8B$ . Alguns jogos foram realizados até agora:

|      |           |                  |
|------|-----------|------------------|
| $6A$ | jogou com | $7A, 7B, 8B$     |
| $6B$ | jogou com | $7A, 8A, 8B$     |
| $7A$ | jogou com | $6A, 6B$         |
| $7B$ | jogou com | $6A, 8A, 8B$     |
| $8A$ | jogou com | $6B, 7B, 8B$     |
| $8B$ | jogou com | $6A, 6B, 7B, 8A$ |

Mas será que isto está correto? Pode ter havido um erro na listagem. Uma maneira de representar a situação é através de uma figura. As turmas serão representadas por pontos e os jogos serão representados por linhas.

Não é difícil agora constatar a consistência das informações. A estrutura que acabamos de conhecer é um **grafo**. Apresentamos duas formas de representar esta estrutura

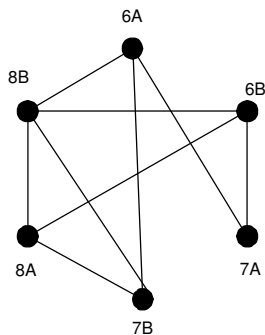


Figura 1.1: Grafo do Campeonato de Vôlei

- Por uma lista, dizendo quem se relaciona com quem.
- Por um desenho, isto é, uma representação gráfica.

Qual é a forma correta? As duas são corretas. A estrutura “grafo” admite várias maneiras de ser representada. Isso não é novidade: a palavra “dois” e o símbolo “2” representam o mesmo conceito matemático.

Para que um grafo fique bem definido temos que ter dois conjuntos:

- O conjunto  $V$ , dos **vértices** – no nosso exemplo, o conjunto das turmas.
- O conjunto  $A$ , das **arestas** – no nosso exemplo, são os jogos realizados.

Em outras palavras, o que nos interessa num grafo é:

- Quem são os **vértices**.

- Que pares de vértices estão ligados e quais não estão (isto é, quem são as **arestas**).

Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os vértices são **adjacentes** e que a aresta é **incidente** aos vértices. No nosso exemplo podemos representar o grafo de forma sucinta como:

$$V = \{6A; 6B; 7A; 7B; 8A; 8B\}$$

$$A = \{(6A; 7A); (6A; 7B); (6A; 8B); (6B; 7A); (6B; 8A); (6B; 8B); (7B; 8A); (7B; 8B); (8A; 8B)\}$$

Observe que não precisamos colocar  $(8A; 7B)$  no conjunto de arestas pois já tínhamos colocado  $(7B; 8A)$ .

O número de vértices será simbolizado por  $|V|$  ou pela letra  $n$ .

O número de arestas será simbolizado por  $|A|$  ou pela letra  $m$ .

No nosso exemplo  $n = 6$  e  $m = 9$ .

## 1.2 Grau de um Vértice

No nosso exemplo vimos que cada turma jogou um número diferente de jogos:

|    |       |         |
|----|-------|---------|
| 6A | jogou | 3 jogos |
| 6B | jogou | 3 jogos |
| 7A | jogou | 2 jogos |
| 7B | jogou | 3 jogos |
| 8A | jogou | 3 jogos |
| 8B | jogou | 4 jogos |

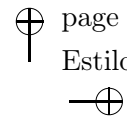
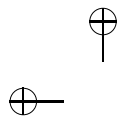
Por isso, no nosso desenho, o vértice  $6A$  tem 3 arestas ligadas a ele, o vértice  $7A$  tem 2 arestas ligadas a ele e assim por diante.

Dizemos que estas arestas são **incidentes** ao vértice. O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice  $v$  é chamado **grau do vértice**  $v$ , simbolizado por  $d(v)$ . No nosso exemplo,  $d(6A) = 3$ ;  $d(7A) = 2$ .

### Exercícios

- Usando o grafo do campeonato:
  - Dê o grau de cada um dos vértices
  - Qual a soma de todos os graus?
  - Qual o número de arestas?
  - O que você observou? Será coincidência?
- Faça o mesmo exercício anterior usando os grafos da figura 1.2:





▲ SEC. 1.2: GRAU DE UM VÉRTICE

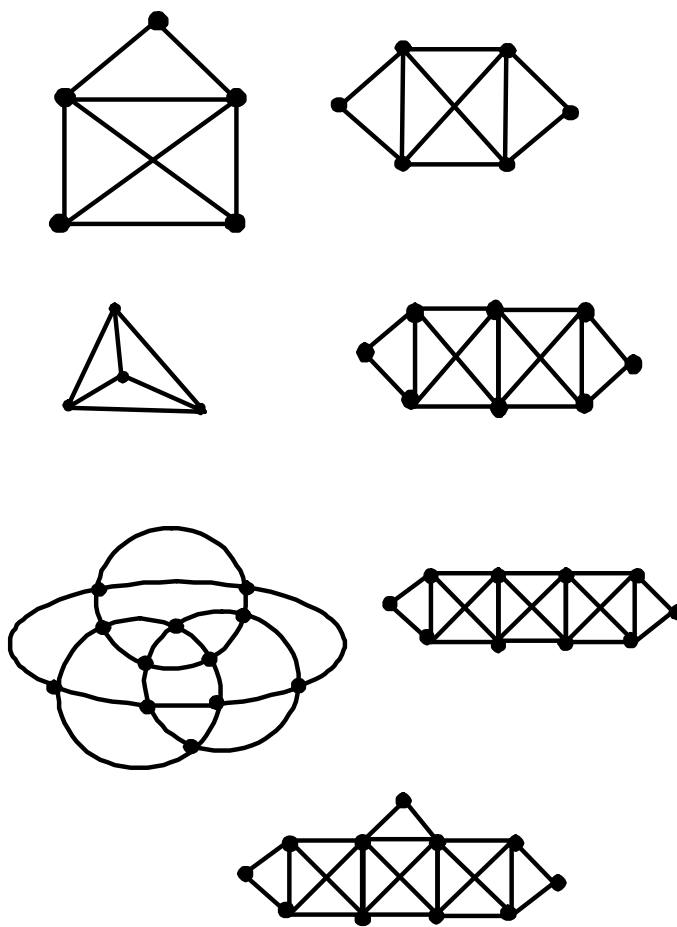
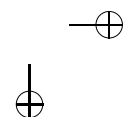
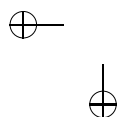


Figura 1.2:



### 1.3 Nosso Primeiro Resultado

No exercício anterior você deve ter observado que a soma dos graus de um grafo é sempre o dobro do número de arestas (e isso não deve ser coincidência...). Isso pode ser escrito em linguagem matemática.

Para isso, denotaremos um grafo pela letra  $G$  e representaremos por  $V(G)$  e  $A(G)$  respectivamente, os conjuntos de vértices e das arestas de  $G$ .

**Teorema.** *Para todo grafo  $G$*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot m.$$

*Isto é: "A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas."*

*Demonstração.* Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

□

**Corolário.** *Todo grafo  $G$  possui um número par de vértices de grau ímpar.*

*Demonstração.* Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par.

□

## 1.4 Alguns Problemas com as Definições

Algumas perguntas acerca das definições podem nos deixar atrapalhados. Vamos examinar algumas.

- Uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo?

Pode. É o que chamamos de **laço** (veja figura 1.3). Por exemplo, vamos construir o grafo em que  $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  e dois vértices serão ligados quando tiverem um divisor comum (diferente de 1).

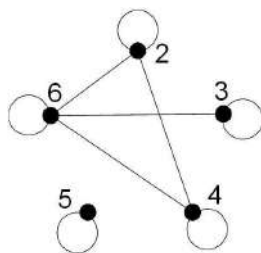


Figura 1.3: Grafo com laços

Pela definição do grafo vemos que o 5 não está ligado a nenhum outro vértice mas tem um laço (como aliás todos os outros vértices deste grafo). Para haver coerência com os resultados da seção anterior, temos que contar o laço duas vezes (uma para cada extremidade) quando calcularmos o grau do vértice. No nosso exemplo:

$$d(2) = 4; d(3) = 3; d(4) = 4; d(5) = 2; d(6) = 5$$

e o teorema continua valendo.

- Dois vértices podem estar ligados por mais de uma aresta?

Podem. Neste caso usamos o nome especial de **multigrafo** (veja figura 1.4). Um exemplo que veremos adiante resulta no seguinte grafo:

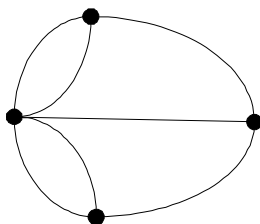


Figura 1.4: Multigrafo (com arestas múltiplas)

Grafos sem laços ou arestas múltiplas são chamados de **grafos simples**. Neste texto estaremos trabalhando quase sempre com grafos simples.

- A figura 1.5 mostra um grafo ou dois grafos?

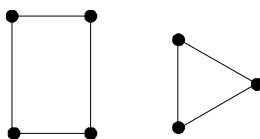


Figura 1.5: Um grafo ou dois?

Depende da situação. Em princípio parecem dois grafos distintos, e podemos considerá-los assim. Mas podemos pensar que esse grafo representa as ligações entre casas de uma cidade onde passa um rio (veja figura a seguir).

Se as pontes forem destruídas em um temporal a cidade ainda

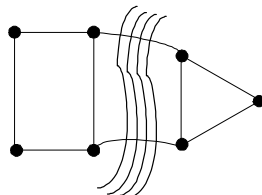
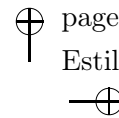
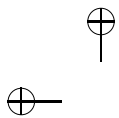


Figura 1.6:

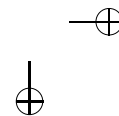
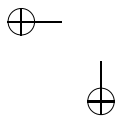
é uma só, apenas foi **desconectada**. O grafo da figura 1.5 poderia ser o que chamamos de **grafo desconexo**. Essa é uma noção importante e voltaremos a ela algumas vezes. Cada parte conexa do grafo (no nosso exemplo o “quadrado” e o “triângulo”) é chamada de **componente conexa do grafo**. Dizemos que um grafo é **conexo** se qualquer par de pontos é ligado por ao menos um caminho.

## 1.5 Isomorfismo

Observe o grafo mostrado na figura adiante.

Verifique que a situação representada é exatamente a mesma do grafo inicial do campeonato. Apenas nesse caso procuramos fazer o desenho de forma a não haver pontos comuns entre as arestas (fora dos vértices, é claro). Quando dois grafos representam a mesma situação dizemos que eles são **grafos isomorfos**.

Esse conceito às vezes gera polêmica. É o mesmo grafo ou não? Claramente as características de um e de outro são as mesmas (graus, número de arestas e outras que veremos mais tarde). E na verdade



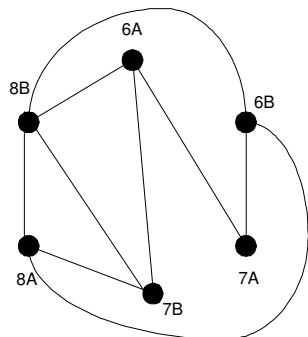


Figura 1.7:

esta não é uma questão realmente importante. O essencial é saber discernir quando dois grafos são isomorfos ou não. Para isso vamos usar uma definição técnica.

Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são ditos **isomorfos** se existe uma correspondência 1-a-1 entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências.

Vejam os um exemplo:

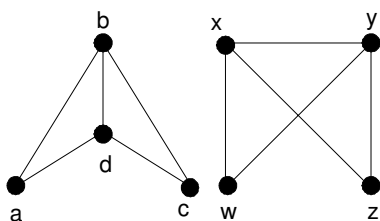


Figura 1.8:

Vamos estabelecer uma correspondência 1 – 1 entre os conjuntos

de vértices:

$$f : a - w$$

$$b - x$$

$$c - z$$

$$d - y$$

Esta função funciona perfeitamente. Se tomarmos uma aresta no primeiro grafo (digamos  $(a; d)$ ) a função fará a correspondência com  $(w; y)$  que é uma aresta no segundo grafo. Se tomarmos dois vértices que não são ligados por uma aresta (digamos  $a$  e  $c$ ) a função fará corresponder dois vértices ( $w$  e  $z$ ) que também não são ligados.

### Exercícios

1. Verifique que a correspondência a seguir *não serve* para mostrar o isomorfismo dos grafos da figura 1.8.

SUGESTÃO: Tome dois vértices que não sejam ligados, faça a correspondência e veja o que acontece.

$$f : a - x$$

$$b - y$$

$$c - z$$

$$d - w$$

2. Mostre que os pares de grafos da figura 1.9 e 1.10 são isomorfos:

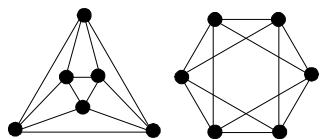


Figura 1.9:

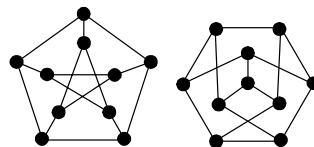


Figura 1.10:

3. Mostre que os grafos 1.11 e 1.12 *não* são isomorfos:

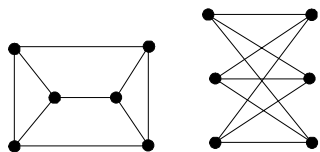


Figura 1.11:

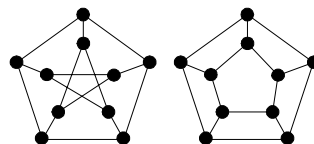


Figura 1.12:

## 1.6 Outras Definições

O conjunto de vértices adjacentes a  $v$  é chamado **vizinhança aberta** de  $v$ , denotado por  $N(v)$ . A **vizinhança fechada** de  $v$  é denotada e definida por  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ , isto é, inclui a vizinhança e o próprio vértice. Podemos estender esta definição para conjuntos de vértices ( $N(S)$  e  $N[S]$ ). Por exemplo, no grafo do campeonato temos  $N(7B) = \{6A; 8A; 8B\}$  e  $N[7B] = \{6A; 7B; 8A; 8B\}$ .



Um vértice de grau 0 é dito **isolado**; um vértice de grau 1 é dito **pendente**. A **sequência de graus** de um grafo é a sequência não crescente formada pelos graus dos vértices dos grafos. Por exemplo, a sequência de graus do grafo do campeonato é  $(4, 3, 3, 3, 3, 2)$ .

O menor grau de um vértice em  $G$  é o grau **mínimo**, denotado  $\delta(G)$ , e o maior é o grau **máximo**, denotado  $\Delta(G)$ . No caso do campeonato temos  $\Delta(G) = 4$  e  $\delta(G) = 2$ .

$G'$  é dito um **subgrafo** de  $G$  se  $V(G') \subseteq V(G)$  e  $A(G') \subseteq A(G)$ . Na figura a seguir, o grafo  $G'$  é um subgrafo de  $G$ . O grafo  $G''$  é dito um subgrafo **induzido** pelo subconjunto  $\{a, b, c, d\}$  de  $V(G)$ , pois todas as arestas incidentes aos vértices de  $a, b, c, d$  em  $G$  estão presentes em  $G''$  (veja a figura 1.13).

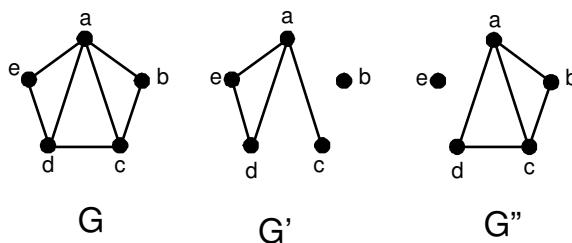


Figura 1.13:

## 1.7 Tipos Especiais de Grafos

- **Grafo completo** Imagine o grafo do campeonato quando todos os jogos tiverem sido jogados. Ele ficaria com o aspecto da 1.14:

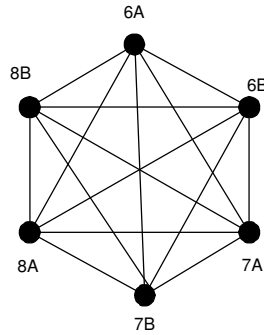


Figura 1.14: O grafo completo  $K_6$

Isto é o que chamamos um **grafo completo**. Um **grafo completo** é definido como um grafo onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$  (O nosso exemplo é  $K_6$ ).

### Exercícios

1. Quantas arestas têm  $K_7$ ? e  $K_{12}$ ? e  $K_n$ ?
2. Quantos vértices um grafo simples precisa ter para poder ter 200 arestas?

- **Grafo complementar** (veja figura 1.15)

Imagine agora que temos o grafo do campeonato e queremos fazer o grafo dos jogos que faltam. Fariamos um grafo com o mesmo conjunto de vértices mas com as arestas que faltam no grafo original. Veja a figura.



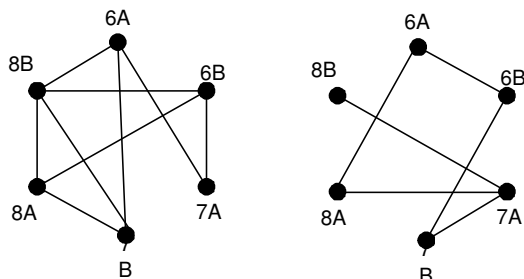


Figura 1.15: Dois grafos complementares

Chamamos este grafo de **grafo complementar** do grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ . É fácil perceber que  $V(G) = V(\overline{G})$  e que  $A(G) \cup A(\overline{G})$  inclui todas as arestas de  $G$ .

- **Grafo nulo ou vazio** (figura 1.16)

Um grafo  $G$  é **nulo ou vazio** quando o conjunto de arestas  $A(G)$  é vazio.

Por exemplo, antes de começar o campeonato nenhum jogo havia sido jogado. Nosso grafo ficaria como na figura 1.16:

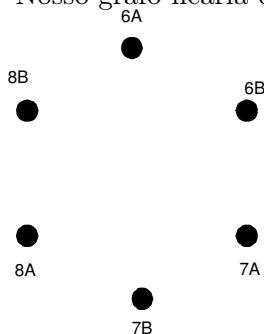


Figura 1.16: Grafo nulo ou vazio

• **Grafo regular** (figura 1.17)

Um grafo é **regular** (de grau  $k$ , ou ainda  $k$ -regular) quando todos os seus vértices têm o mesmo grau ( $k$ ). A figura 1.17 mostra um grafo 3-regular, isto é, todos os vértices tem grau 3.

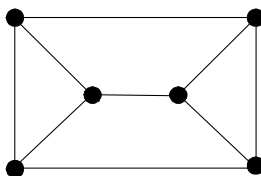


Figura 1.17: Um grafo  $k$ -regular de grau 3

• **Ciclo** (figura 1.18)

Um ciclo é um grafo conexo regular de grau 2. A notação é  $C_n$

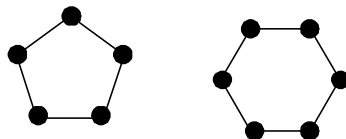


Figura 1.18: Exemplos de ciclo:  $C_5$  e  $C_6$

• **Caminho** (figura 1.19)

Um caminho é um ciclo do qual retiramos uma aresta. O comprimento do caminho é dado pelo número de arestas (o que faz sentido: é o número de “passos” que gastamos para percorrer o caminho). Assim, o caminho  $P_n$  é obtido retirando uma aresta do ciclo  $C_{n+1}$ .

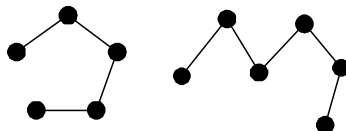


Figura 1.19: Exemplos de caminho:  $P_4$  e  $P_5$

• **Árvores** (figura 1.20)

Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos como subgrafos. Note que o fato de não ter ciclos faz com que a árvore seja a maneira mais “econômica” de conectar os vértices. As árvores formam uma família importante de grafos e voltaremos a elas mais tarde.

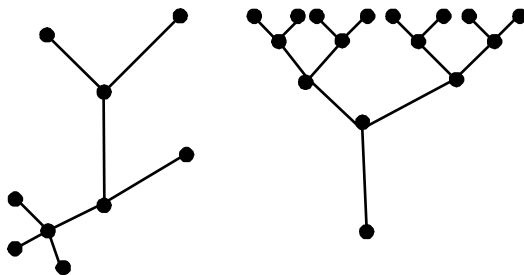


Figura 1.20: Exemplos de árvores

• **Grafos bipartidos** (figura 1.21)

É um grafo em que o conjunto  $V$  de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tal que toda aresta de  $G$  tem uma extremidade em  $V_1$  e outra em  $V_2$ . O subconjunto  $V_1$  é dito um **subconjunto independente de vértices do grafo  $G$**  pois não há arestas ligando dois vértices de  $V_1$ . Temos também que  $V_2$  é um subconjunto independente de

vértices de  $G$ .

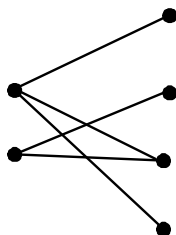


Figura 1.21: Grafo bipartido

- **Grafos bipartidos completos – Notação  $K_{p,q}$**  (figura 1.22).

É um grafo bipartido em que todos os vértices de  $V_1$  são ligados a todos os vértices de  $V_2$ .

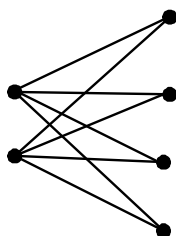


Figura 1.22: Grafo bipartido completo  $K_{2,4}$

## 1.8 Representação por Matrizes

Matrizes é um assunto típico do ensino médio mas o que mostraremos aqui pode ser entendido por todos. Uma das formas

mais comuns de “informar” uma estrutura de grafo para um computador é através de matrizes. Uma matriz nada mais é do que uma tabela com linhas e colunas. Um exemplo bastante conhecido é a tabuada:

| × | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1 | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 2 | 0 | 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 0 | 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 0 | 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Se quisermos saber o valor de  $3 \times 5$  procuramos o valor na linha do 3 e na coluna do 5, isto é 15.

Mas as matrizes têm outras utilidades. No caso dos grafos elas podem ser usadas na representação de várias formas. Eis algumas delas. Exemplificaremos com as representações do grafo a seguir:

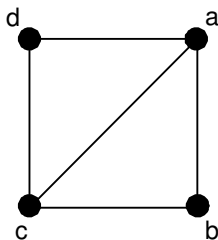


Figura 1.23:

- Matriz de adjacência – é a matriz definida por

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } ij \in A(G) \\ 0 & \text{se } ij \notin A(G) \end{cases}$$

No exemplo da figura 1.23, a matriz de adjacência é:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Matriz de incidência – é a matriz  $n \times m$  definida por

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } e_j \text{ é incidente em } v_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



No exemplo da figura 1.23 a matriz de incidência é:

|   | ab | ac | ad | bc | cd |
|---|----|----|----|----|----|
| a | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  |
| b | 1  | 0  | 0  | 1  | 0  |
| c | 0  | 1  | 0  | 1  | 1  |
| d | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  |

### Exercícios

1. Qual o grafo complementar do grafo desconexo formado por duas componentes conexas isomorfas a  $K_3$  e  $K_7$ ?
2. Qual o grafo complementar do grafo desconexo formado por duas componentes conexas isomorfas a  $K_r$  e  $K_s$ ?
3. Mostre que um grafo  $G$  é desconexo, então seu complementar  $\overline{G}$  tem um subgrafo bipartido completo. Mostre que a recíproca não é verdadeira.
4. Mostre que as sequências  $(9,8,7,6,5,5,4,3,3)$  e  $(7,7, 7,6,5,4,3,2)$  não correspondem a sequências de graus de nenhum grafo.
5. Mostre que a sequência  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$  corresponde a pelo menos dois grafos não isomorfos.
6. Mostre que uma mesma sequência pode corresponder a grafos não isomorfos.
7. Prove que  $\delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta$ .

8. Mostre que em um grafo bipartido  $m \leq \frac{n^2}{4}$ .
9. (a) Mostre que se  $G$  é conexo, então  $m \geq n - 1$ .  
 (b) Mostre que a recíproca não é verdadeira.  
 (c) Qual o menor valor de  $m$  que garante que  $G$  é conexo?
10. Desenhe uma representação do grafo cuja matriz de adjacência é:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

11. Um grafo é **autocomplementar** se for isomorfo ao seu complemento. Mostre que se  $G$  é autocomplementar, então  $n = 4k$  ou  $n = 4k + 1$  para algum  $k$  inteiro.
12. O **grafo de linha** ou **grafo adjunto**, notação  $L(G)$ , é o grafo cujos vértices estão em correspondência 1 a 1 com as arestas de  $G$  e cujas arestas ligam vértices que correspondem a arestas incidentes em  $G$ .
- (a) Mostre que  $L(K_3) = L(K_{1,3})$ .
- (b) Mostre que se  $G$  é regular de grau  $k$ ,  $L(G)$  é regular de grau  $2k - 2$ .
- (c) Encontre uma expressão para o número de arestas de  $L(G)$  em função dos graus de  $G$ .

13. Suponha que as arestas de  $K_6$  sejam coloridas de azul ou de vermelho. Mostre que, seja qual for a forma de colorir, o grafo terá um subgrafo isomorfo a  $K_3$  colorido com uma só cor.

ROTEIRO: Suponha, por absurdo, que isso não é verdade.

- (a) Escolha um vértice  $v$  qualquer; mostre que existem (pelo menos) 3 arestas incidentes a  $v$  com a mesma cor (digamos, sem perda de generalidade,  $(v; a)$ ;  $(v; b)$ ; e  $(v; c)$  são coloridas de azul).
- (b) Mostre que  $(a; b)$ ;  $(a; c)$ ; e  $(b; c)$  não podem ser coloridas de azul.
- (c) Conclua que  $(a; b)$ ;  $(a; c)$ ; e  $(b; c)$  devem ser coloridas de vermelho, mostrando o absurdo, e provando a afirmação.
14. Suponha que as arestas de  $K_{17}$  sejam coloridas de azul, verde ou de vermelho. Mostre que, seja qual for a forma de colorir, o grafo terá um subgrafo isomorfo a  $K_3$  colorido com uma só cor.
- SUGESTÃO: Use o exercício anterior.
15. Mostre que num grafo simples pelo menos dois vértices têm o mesmo grau.

## Capítulo 2

# Ciclos e Caminhos

### 2.1 Conexidade Outra Vez

**Observação.** Quando não houver risco de confusão a aresta  $(v, w)$  será denotada simplesmente por  $vw$ .

Um **passeio** é uma sequência de arestas do tipo  $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{s-1}v_s$ ;  $s$  é o **comprimento** do passeio. Se todas as arestas do passeio são distintas, o passeio é chamado **trilha**; se  $v_0 = v_s$  o passeio é uma **trilha fechada**. Se, além das arestas, todos os vértices são distintos então temos um **caminho** e se  $v_0 = v_s$  temos um ciclo (como visto anteriormente). Uma outra forma de definir a conexidade é observar que um grafo  $G$  é conexo se, e só se, existe um caminho entre quaisquer dois vértices de  $G$ . As componentes conexas podem ser vistas como as classes de equivalência da relação:

$x \simeq y$  se, e somente se, existe um caminho ligando  $x$  a  $y$ .

(Para isso, estamos considerando que entre um vértice e ele mesmo existe um caminho de comprimento 0.) O menor comprimento pos-

sível para um caminho entre os vértices  $u$  e  $v$  é chamado de **distância entre  $u$  e  $v$** . Podemos também sinalizar as sequências de arestas descritas acima pela sucessão de vértices  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v_s$ .

Dizemos que um grafo conexo é  **$k$ -conexo** se, ao retirarmos  $k - 1$  vértices do grafo, ele continua conexo. Por exemplo, o grafo da figura 1.17 é 3 conexo, pois podemos escolher 2 vértices quaisquer para retirar, e mesmo assim o grafo continuará conexo.

**Teorema.** *Um grafo  $G$  é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar.*

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  bipartido. Se não houver ciclo em  $G$ , não há o que mostrar. Se há um ciclo em  $G$  este alterna vértices de  $V_1$  e  $V_2$ , dois subconjuntos independentes e disjuntos. Partindo de  $V_1$  (por exemplo), para retornar ao ponto de partida teremos que utilizar um número par de arestas. O ciclo é, portanto, de comprimento par.

( $\Leftarrow$ ) Podemos considerar apenas grafos conexos. Seja  $G$  um grafo sem ciclos ímpares. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$ , independentes e disjuntos. Tomamos primeiramente um vértice qualquer  $v$ . O subconjunto  $V_1$  será formado por todos os vértices  $w$  tais que exista um caminho de comprimento par entre  $v$  e  $w$ . O subconjunto  $V_2$  será formado por todos os vértices  $w$  tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre  $v$  e  $w$ . Os conjuntos  $V_1$  e  $V_2$  são disjuntos, pois se  $w$  estivesse em  $V_1$  e  $V_2$  ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um

caminho de comprimento ímpar ligando  $v$  a  $w$ . Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em  $w$ , produzindo alguns ciclos (veja a figura a seguir). Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em  $G$ , contrariando a hipótese.

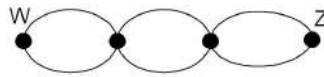


Figura 2.1:

□

Já sabemos que o conjunto de vértices de um grafo bipartido é particionado em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$ . O conjunto  $V_1$  (e também o conjunto  $V_2$ ) é chamado **conjunto independente**, isto é, se  $w$  e  $t$  forem ambos vértices de  $V_1$  eles não são adjacentes.

### Exercício

Nos pares de grafos das figuras 2.2 e 2.3, mostre qual dos grafos é bipartido e qual não é.

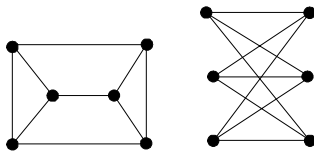


Figura 2.2:

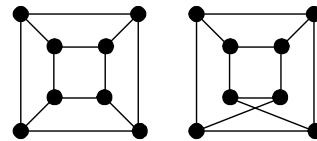


Figura 2.3:



## 2.2 O Problema do Menor Caminho

### Algoritmos e Computadores

Nesta seção vamos tratar de um problema relativamente simples. Por exemplo, alguém precisa se deslocar de uma cidade para outra e para isso dispõe de várias estradas que passam por diversas cidades. Qual caminho oferece uma trajetória de menor comprimento?

O algoritmo que soluciona este problema (e até hoje não se encontrou forma melhor) foi criado por Edsger Wybe Dijkstra, em 1952. Dijkstra nasceu em 1930, na cidade de Roterdan – Holanda, e morreu em 2002. Foi um cientista de computação e recebeu o Turing Award de 1972 por suas contribuições fundamentais na área de linguagens de programação.

Notem um fato interessante: geralmente o que estudamos em Matemática foi criado há muito tempo. Mas a Matemática, como veremos no problema que estamos estudando, continua a oferecer soluções e com o desenvolvimento da Informática a ideia de uma solução para um problema tem se modificado. Em vez de procurarmos um número, uma resposta (o que em muitos casos é necessário), procuramos um algoritmo, isto é, uma série de procedimentos que nos levem à solução. A vantagem é que, se o problema for muito extenso, poderemos programar um computador para realizar este algoritmo. Este problema é um excelente exemplo disso.

Veremos mais tarde que isso não quer dizer que não precisamos de teoria, muito pelo contrário. Um bom algoritmo depende de boa matemática. Mas, voltaremos a isso adiante. Por enquanto vamos ver

a solução, simples e interessante, oferecida por Dijkstra, que viveu no nosso tempo, ou dos nossos pais.

Observe que trabalharemos com grafos valorados, isto é, estaremos atribuindo valores às arestas. Estes valores podem ser distâncias, tempo gasto no trajeto, custo com a ligação etc. Usaremos as expressões “custo” ou “distância” para nos referirmos a estes valores. Estes valores geralmente são estimados por engenheiros, economistas e consideraremos nos próximos exemplos que eles são dados. Este algoritmo trabalha apenas com grafos valorados com valores positivos e nossa tarefa é minimizar “custo” ou “distância”.

### Qual o Menor Caminho até a Escola?

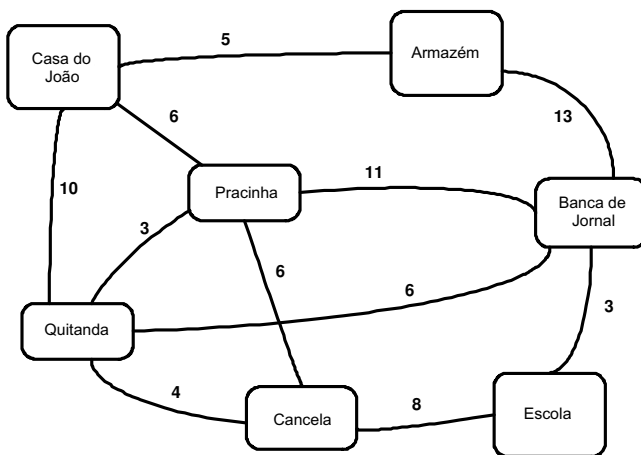


Figura 2.4:

Lembremos que este grafo é valorado, isto é, atribuímos valores



às arestas. A “distância” é diferente da que estamos acostumados. Por exemplo, na figura 2.4, entre a Pracinha (P) e a Banca de Jornal (B) colocamos a distância 11 pois há um cachorro que nos assusta. Entre a Quitanda (Q) e a Cancela (C) a “distância” é 4 pois há uma moça (ou rapaz) interessante. Usaremos este grafo simples e pequeno para vermos como o algoritmo de Dijkstra funciona. Começamos calculando todas as distâncias a partir da Casa de João (J). A distância de J até J é 0 (zero).

Vamos começar com o mapa sem ligações (2.5).

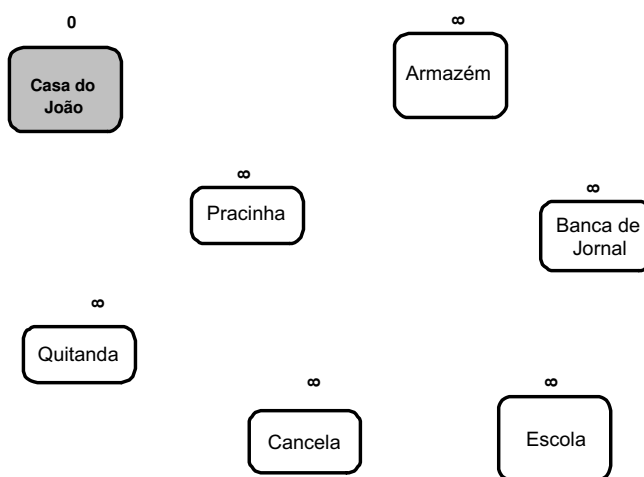


Figura 2.5:

Até onde posso chegar a partir da casa de João (J) em uma única etapa? Qual o custo? Vamos preencher a tabela a seguir.

| Determinado<br>(fechado) | Posso chegar<br>até... | ...com custo<br>ou distância... | ...vindo de...      |
|--------------------------|------------------------|---------------------------------|---------------------|
|                          | J - Casa de João       | 0                               | ***                 |
|                          | A - Armazém            | $\infty$                        | Ainda não atingimos |
|                          | P - Pracinha           | $\infty$                        | Ainda não atingimos |
|                          | Q - Quitanda           | $\infty$                        | Ainda não atingimos |
|                          | B - Banca de Jornal    | $\infty$                        | Ainda não atingimos |
|                          | C - Cancela            | $\infty$                        | Ainda não atingimos |
|                          | E - Escola             | $\infty$                        | Ainda não atingimos |

**Atenção:** colocamos a distância  $\infty$  para dizer que ainda não atingimos este vértice.

Vamos entender a figura e a tabela; na figura escurecemos a “Casa de João”, pois já sabemos a menor distância: 0. Os outros vértices ainda podem ser melhorados, por isso não estão escurecidos, e a etiqueta  $\infty$  mostra que ainda não foram atingidos.

A partir da casa de João, quem podemos atingir imediatamente? O Armazém, que está a distância 5 da Casa de João, a Pracinha que está a distância 6 e a Quitanda, que está a distância 10. Vou assinalar isto no meu grafo. Mais ainda, eu agora percebo que a distância ao armazém não irá diminuir. De fato, qualquer outro caminho que eu tome, já começa com um valor maior que 5 (ou eventualmente igual). Então escureço o vértice do armazém para mostrar que ele está “fechado”.

▲ SEC. 2.2: O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO

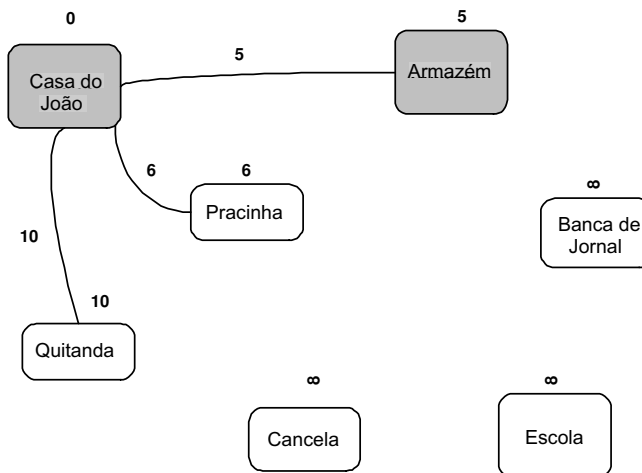


Figura 2.6:

Vamos preencher a tabela de acordo:

| Determinado (fechado) | Posso chegar até... | ...com custo ou distância... | ...vindo de...      |
|-----------------------|---------------------|------------------------------|---------------------|
| *                     | J - Casa de João    | 0                            | ***                 |
| *                     | A - Armazém         | 5                            | J                   |
|                       | P - Pracinha        | 6                            | J                   |
|                       | Q - Quitanda        | 10                           | J                   |
|                       | B - Banca de Jornal | $\infty$                     | Ainda não atingimos |
|                       | C - Cancela         | $\infty$                     | Ainda não atingimos |
|                       | E - Escola          | $\infty$                     | Ainda não atingimos |

Como a distância até o armazém não vai diminuir, é a nossa vez de investigar se indo pelo caminho do armazém poderemos melhorar as distâncias. A partir do Armazém só podemos chegar à Banca de

Jornais (B) (Lembre-se que J já está fechado). Note que a etiqueta de distância da Banca de Jornal passa a ser  $18 = 5 + 13$  (5 da etiqueta do Armazém mais 13 da distância Armazém-Banca de Jornais). Como  $18 < \infty$  a melhor distância até a Banca é de 18.

Nosso grafo e tabela ficam assim e o próximo vértice a ser fechado é a Pracinha (P).

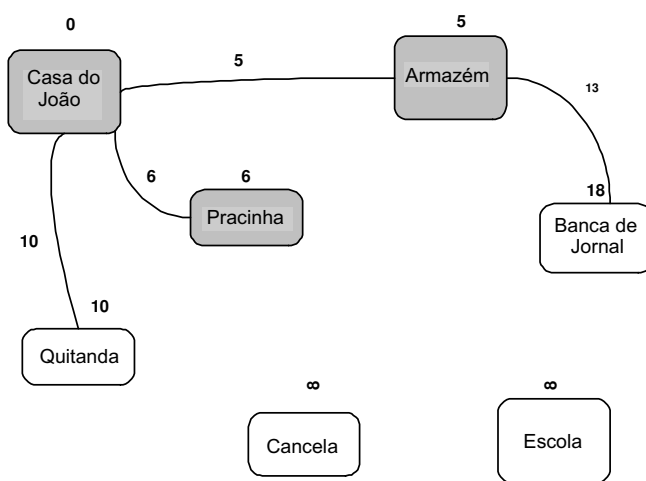


Figura 2.7:

| Determinado (fechado) | Posso chegar até... | ...com custo ou distância... | ...vindo de...      |
|-----------------------|---------------------|------------------------------|---------------------|
| *                     | J - Casa de João    | 0                            | ***                 |
| *                     | A - Armazém         | 5                            | J                   |
| *                     | P - Pracinha        | 6                            | J                   |
|                       | Q - Quitanda        | 10                           | J                   |
|                       | B - Banca de Jornal | 18                           | A                   |
|                       | C - Cancela         | $\infty$                     | Ainda não atingimos |
|                       | E - Escola          | $\infty$                     | Ainda não atingimos |

Como a distância à Pracinha não pode ser melhorada é a partir dela que investigaremos. Podemos chegar, passando pela Pracinha à Quitanda, à Banca de Jornal e à Cancela. Vamos ver o que acontece nos três casos:

Quitanda:  $6$  (etiqueta da Pracinha) +  $3$  (distância Pracinha-Quitanda) =  $9$ ; como  $9 < 10$  (que é a etiqueta atual da Quitanda), o caminho melhor passa a ser pela Pracinha.

Cancela:  $6 + 6 = 12 < \infty$  logo o caminho para a cancela passa a ser pela Pracinha.

Banca de Jornal:  $6 + 11 = 17 < 18$  e o caminho para a Banca de Jornal passa a ser pela Pracinha.

O vértice a ser fechado é a Quitanda pois é o menor valor em aberto.

Nosso grafo e tabela ficam assim:

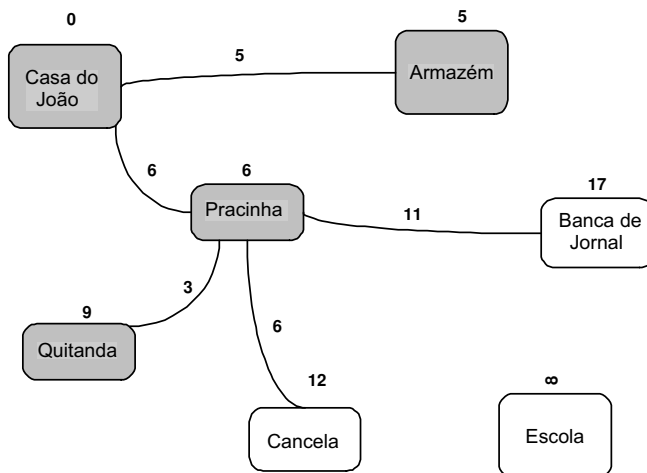


Figura 2.8:

| Determinado (fechado) | Posso chegar até... | ...com custo ou distância... | ...vindo de...      |
|-----------------------|---------------------|------------------------------|---------------------|
| *                     | J - Casa de João    | 0                            | ***                 |
| *                     | A - Armazém         | 5                            | J                   |
| *                     | P - Pracinha        | 6                            | J                   |
| *                     | Q - Quitanda        | 9                            | P                   |
|                       | B - Banca de Jornal | 17                           | P                   |
|                       | C - Cancela         | 12                           | P                   |
|                       | E - Escola          | $\infty$                     | Ainda não atingimos |

Agora vamos estudar se podemos melhorar a distância a partir da Quitanda (que fechamos por ser o menor valor em aberto).

Da Quitanda posso alcançar a Banca de Jornais com distância total  $9 + 6 = 15 < 17$  logo meu caminho para a Banca de Jornais passa a usar a Quitanda.

Também posso alcançar a Cancela mas com distância

$$9 + 4 = 13 > 12.$$

Então não é vantagem, e continuo a ir para a Cancela passando pela Pracinha.

Nosso grafo e tabela ficam assim:

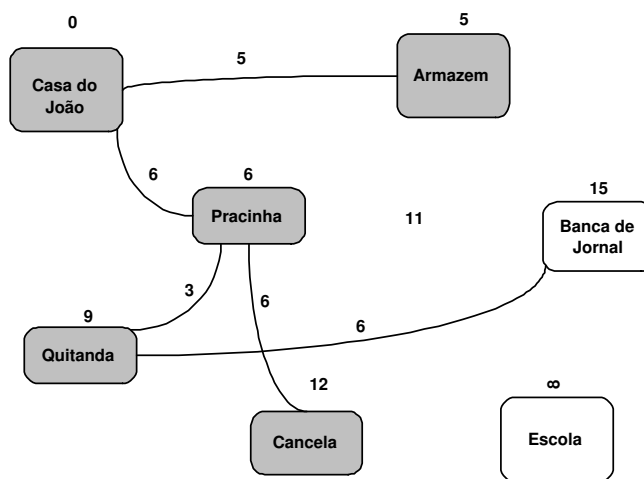


Figura 2.9:

| Determinado (fechado) | Posso chegar até... | ...com custo ou distância... | ...vindo de...      |
|-----------------------|---------------------|------------------------------|---------------------|
| *                     | J - Casa de João    | 0                            | ***                 |
| *                     | A - Armazém         | 5                            | J                   |
| *                     | P - Pracinha        | 6                            | J                   |
| *                     | Q - Quitanda        | 9                            | P                   |
|                       | B - Banca de Jornal | 15                           | Q                   |
| *                     | C - Cancela         | 12                           | P                   |
|                       | E - Escola          | $\infty$                     | Ainda não atingimos |

Observe que escurecemos o vértice da Cancela, que é o que tem menor distância acumulada entre os abertos. Isso mostra que nem sempre “fechamos” os vértices na ordem da tabela. Neste caso “fechamos” a Cancela antes da Banca de Jornal.

Já estamos quase terminando. Da Cancela só consigo ir à Escola com distância acumulada  $12 + 8 = 20 < \infty$ .

Minha tabela e grafo ficam assim (escurecemos o vértice da Banca de Jornais):

| Determinado (fechado) | Posso chegar até... | ...com custo ou distância... | ...vindo de... |
|-----------------------|---------------------|------------------------------|----------------|
| *                     | J - Casa de João    | 0                            | ***            |
| *                     | A - Armazém         | 5                            | J              |
| *                     | P - Pracinha        | 6                            | J              |
| *                     | Q - Quitanda        | 9                            | P              |
| *                     | B - Banca de Jornal | 17                           | Q              |
| *                     | C - Cancela         | 12                           | P              |
|                       | E - Escola          | 20                           | C              |



▲ SEC. 2.2: O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO

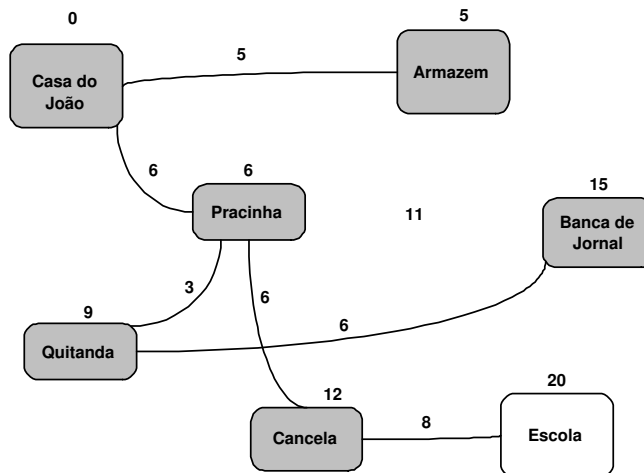


Figura 2.10:

E finalmente, vemos que pela Banca de Jornal conseguimos chegar à Escola com distância acumulada de  $15 + 3 < 20$ .

A tabela e o grafo finais ficam:

| Determinado (fechado) | Posso chegar até... | ...com custo ou distância... | ...vindo de... |
|-----------------------|---------------------|------------------------------|----------------|
| *                     | J - Casa de João    | 0                            | ***            |
| *                     | A - Armazém         | 5                            | J              |
| *                     | P - Pracinha        | 6                            | J              |
| *                     | Q - Quitanda        | 9                            | P              |
| *                     | B - Banca de Jornal | 17                           | Q              |
| *                     | C - Cancela         | 12                           | P              |
| *                     | E - Escola          | 18                           | B              |

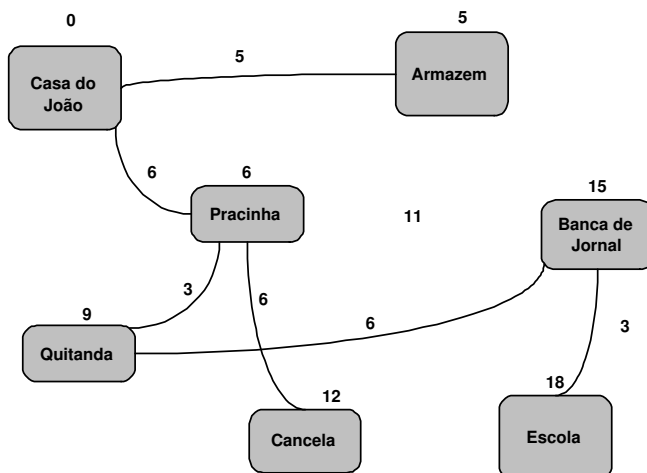


Figura 2.11:

Observe que:

- O grafo final é uma árvore – conexa e sem ciclos (sempre que chegávamos num vértice, eliminávamos uma aresta, impedindo a formação de ciclos).
- O algoritmo encontra o menor caminho da Casa de João a todos os outros pontos. Ele *não* encontra o menor caminho entre dois vértices quaisquer. Por exemplo para ir da Cancela à Banca de Jornais a distância é 11 e não 15 como a árvore sugere.
- A representação gráfica foi útil para entendermos o problema, mas poderíamos perfeitamente ter usado apenas uma matriz de distância:

|   | J        | A        | P        | Q        | B        | C        | E        |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| J | 0        | 5        | 6        | 10       | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| A | 5        | 0        | $\infty$ | $\infty$ | 13       | $\infty$ | $\infty$ |
| P | 6        | $\infty$ | 0        | 3        | 11       | 6        | $\infty$ |
| Q | 10       | $\infty$ | 3        | 0        | 6        | 4        | $\infty$ |
| B | $\infty$ | 13       | 11       | 6        | 0        | $\infty$ | 3        |
| C | $\infty$ | $\infty$ | 6        | 4        | $\infty$ | 0        | 8        |
| E | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 3        | 8        | 0        |

**Exercícios**

1. Nas figura abaixo, use o algoritmo de Dijkstra para descobrir qual o menor caminho do vértice A a todos os outros vértices.

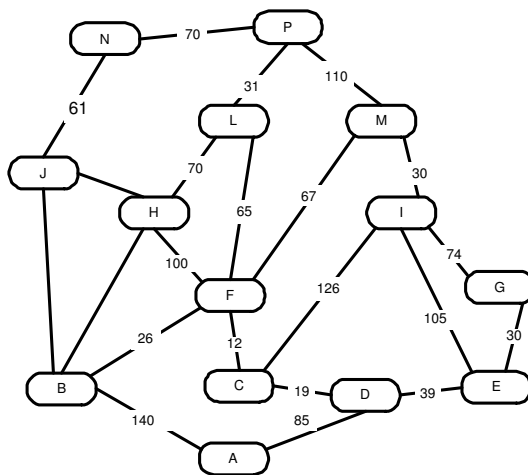
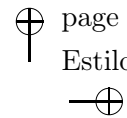
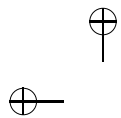


Figura 2.12:

2. Abaixo, temos uma tabela de distâncias entre uma mercearia e as localidades onde ela faz entregas. Use o algoritmo de Dijkstra para descobrir qual o menor caminho da mercearia a todas as outras localidades.

|           | Mercearia | B        | C        | D        | E        | F        | G        | H        |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Mercearia | 0         | 11       | 5        | 8        | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| B         | 11        | 0        | $\infty$ | 3        | $\infty$ | $\infty$ | 8        | $\infty$ |
| C         | 5         | $\infty$ | 0        | 2        | 8        | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| D         | 8         | 3        | 2        | 0        | 4        | $\infty$ | 12       | 11       |
| E         | $\infty$  | $\infty$ | 8        | 4        | 0        | 15       | $\infty$ | 4        |
| F         | $\infty$  | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 15       | 0        | 3        | 7        |
| G         | $\infty$  | 8        | $\infty$ | 12       | $\infty$ | 3        | 0        | 2        |
| H         | $\infty$  | $\infty$ | $\infty$ | 11       | 4        | 7        | 2        | 0        |



## Capítulo 3

# Mais Ciclos e mais Caminhos

### 3.1 Euler e as Pontes de Königsberg

Na introdução, perguntamos se você conseguiria desenhar a casinha abaixo sem tirar o lápis do papel. A figura mostra uma solução e, na verdade, o problema é bastante fácil.

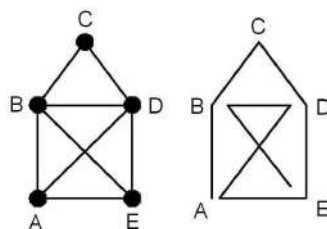
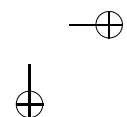
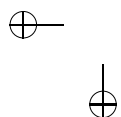


Figura 3.1:



Mas se quisermos começar pelo vértice  $B$ ? (você pode tentar o tempo que quiser).

O fato é que esse outro problema é impossível. Todas as soluções começam/terminam pelo vértice  $A/E$ . Se começam em  $A$  terminam em  $E$ , e vice-versa.

O problema tem origem no famoso “problema das pontes de Königsberg”, considerado o marco fundador da Teoria dos Grafos. Os habitantes de Königsberg (hoje Kaliningrado) se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes do Rio Prega, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida. O problema e sua modelagem por grafos está apresentada na figura a seguir.

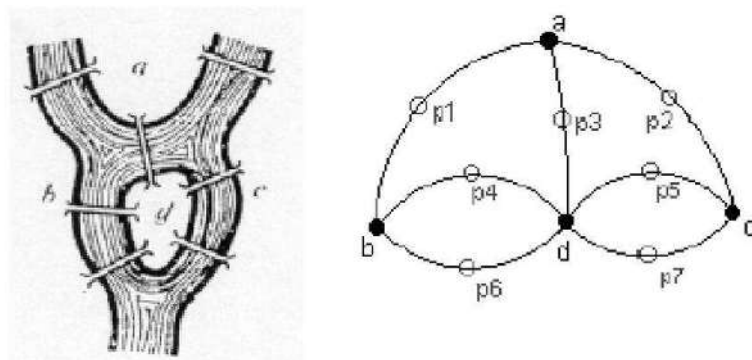


Figura 3.2:

Observamos que o problema dá origem a um grafo com arestas múltiplas, o que não afetará a solução. Leonard Euler mostrou que a resposta era negativa, estabelecendo assim uma condição necessária; embora se acredite que a suficiência não lhe fosse desconhecida. Esta segunda parte foi publicada por Hierholzer em 1873, muito mais tarde.

Antes de prosseguir com a solução, vamos tecer algumas considerações sobre grafos, computadores e problemas finitos.

### Esse Problema é Importante?

Sim! Para começo de conversa, ele é interessante, simples de propor e veremos que sua solução é atraente, interessante e tem consequências importantes.

Mas no aspecto imediato, pense numa pequena cidade com um único caminhão para recolher o lixo onde o prefeito deseja economizar, o que significa que ele prefere que o caminhão passe uma única vez por todas as ruas e retorne ao ponto de partida.

O problema é idêntico ao problema da casinha e, se a cidade tivesse essa configuração, não teria solução (pois o caminhão não retornaria ao ponto inicial (Você experimentou?). Se o mapa da cidade fosse como na figura a seguir, o prefeito ficaria contente (experimente desenhar esta figura sem tirar o lápis do papel mas voltando ao ponto inicial).

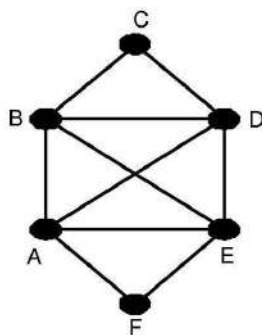


Figura 3.3:

E em que um computador pode nos ajudar neste caso?

## 3.2 Estrutura de Dados

O desenho ajuda a nós, pessoas, mas os computadores preferem letras e números. Lembre-se que a casinha representa o grafo  $G(V, A)$  em que  $V(G) = \{A, B, C, D, E\}$  e  $A(G) = \{(A; B); (A; D); (A; E); (B; C); (B; D); (B; E); (C; D); (D; E)\}$ .

Observe que usamos uma ordem semelhante à ordem do dicionário; isso facilita encontrar a aresta que procuramos e isso vale para o computador também (essa ordem tem o nome de “ordem lexicográfica”).

Bem, queremos saber se realmente todas as soluções começam/terminam por  $A/E$ . Não haverá exceção? Como o nosso problema tem um número de possibilidades finito e pequeno, podemos examinar todas. Como um computador pode fazer isso?

Calma! Não precisamos saber programação de computadores. Basta lembrar que computadores têm facilidade para tratar informações organizadas. Como isso funciona no nosso caso?

Digamos que achei a solução codificada pela sequência de letras  $AEBDCBADE$ . Mesmo sem o desenho, podemos verificar que esta é de fato uma solução. As arestas disponíveis são:

AB AD AE BC BD BE CD DE

Começamos pela aresta  $AE$ . Ela está disponível? Sim. Retiramos ela



da lista de disponíveis:

AB AD ~~AE~~ BC BD BE CD DE

A próxima aresta a ser examinada é  $EB$ . Está disponível? Sim. Retiramos ela da lista de disponíveis:

AB AD ~~AE~~ BC BD ~~BE~~ CD DE

(Repare que no nosso problema  $EB$  e  $BE$  são a mesma coisa.)

E assim por diante. A sequência da verificação está aí abaixo:

|   |  |
|---|--|
| <u>AE</u> BDCBADE                                   | AB AD <del>AE</del> BC BD BE CD DE   |
| A <u>E</u> BDCBADE                                  | AB AD <del>AE</del> BC BD <del>BE</del> CD DE  |
| AE <u>B</u> D CBADE                                 | AB AD <del>AE</del> BC <del>BD</del> <del>BE</del> CD DE   |
| AE <u>B</u> D <u>C</u> BADE                         | AB AD <del>AE</del> BC <del>BD</del> <del>BE</del> <del>CD</del> DE                                  |
| AE <u>B</u> D <u>C</u> <u>B</u> ADE                 | AB AD <del>AE</del> <del>BC</del> <del>BD</del> <del>BE</del> <del>CD</del> DE                       |
| AE <u>B</u> D <u>C</u> <u>B</u> <u>A</u> DE         | AB <del>AD</del> <del>AE</del> <del>BC</del> <del>BD</del> <del>BE</del> <del>CD</del> DE            |
| AE <u>B</u> D <u>C</u> <u>B</u> <u>A</u> <u>D</u> E | AB <del>AD</del> <del>AE</del> <del>BC</del> <del>BD</del> <del>BE</del> <del>CD</del> <del>DE</del> |

E a verificação mostra que a solução é boa.

Observe que não usamos o desenho. E que foi fundamental a maneira como apresentamos os dados. É o que chamamos uma **estrutura de dados**. Lembre-se, computadores são máquinas e não

podemos passar informações de qualquer jeito. A estrutura de dados é fundamental.

Não temos a intenção aqui de explicitar o funcionamento de um computador, mas intuitivamente percebemos que com a estrutura adequada e uma sequência de procedimentos (um programa!), isto é, um **algoritmo**, podemos verificar se uma sequência de 9 letras (por quê 9?) é ou não uma solução.

Vamos fazer algumas contas. Temos 8 arestas disponíveis e podemos numerá-las de 1 a 8. Podemos pensar num procedimento (diferente do que usamos antes) que verifique se uma determinada sequência de 8 algarismos do tipo  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  ou  $(3, 5, 6, 2, 8, 4, 7, 1)$  é ou não uma solução para o problema da casinha. Melhor ainda, podemos colocar estas sequências em ordem de  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  até  $(8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ .

Quantas sequências temos? Na apostila [2] vimos que teremos  $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$  sequências. São as permutações de 8 elementos. Ora, um bom computador pode gerar e verificar estas sequências todas em segundos! Poderemos ter certeza de que todas as soluções realmente começam (ou terminam) com a letra  $A$  ou  $E$ .

Isto se chama uma “**solução por força bruta**” e não usamos nenhuma sofisticação matemática, nenhum teorema. Será o fim da Matemática? Não é bem assim...

Lembre-se do prefeito. Digamos que a cidade dele não tenha 8 ruas, mas 20. Não é uma grande cidade e podemos tentar usar a mesma força bruta do computador para resolver o problema de per-

correr com o caminhão sem repetição de ruas. Se temos 20 ruas, teremos  $20!$  sequências. Quanto é isso?

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \text{ sequências}$$

São muitas sequências. Mas será que um bom computador não resolveria este problema? Se o computador verificasse **um milhão** de sequências por segundo (e poucos computadores o fazem hoje em dia) ele demoraria (os cálculos só incluem a parte inteira):

$$2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \div 1\,000\,000 \geq 2\,432\,902\,008\,170 \text{ segundos}$$

$$2\,432\,902\,008\,170 \div 60 \geq 40\,548\,366\,800 \text{ minutos}$$

$$40\,548\,366\,800 \div 60 \geq 675\,806\,110 \text{ horas}$$

$$675\,806\,110 \div 24 \geq 28\,158\,580 \text{ dias}$$

$$28\,158\,580 \div 365 \geq 77\,140 \text{ anos}$$

$$77\,140 \div 1\,000 \geq 77 \text{ milênios}$$

O prefeito não pode esperar tanto tempo (nem nós, nem ninguém). Quem virá nos socorrer? Um teorema de Euler.

### 3.3 Grafos Eulerianos

Um grafo com  $m$  arestas é dito **euleriano** se existe uma trilha fechada de comprimento  $m$  em  $G$ ; em outras palavras, se podemos percorrer cada aresta uma e só uma vez partindo de um vértice e a

ele retornando. Se o grafo não é euleriano mas tem uma trilha aberta de comprimento  $m$ , ele é dito **semieuleriano**.

Em outras palavras, podemos desenhar um grafo euleriano (ou melhor, uma representação gráfica dele) sem retirar o lápis do papel e retornando ao ponto inicial. Num grafo semieuleriano começamos num ponto e terminamos em outro.

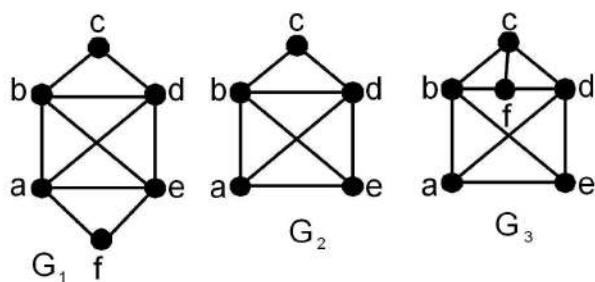


Figura 3.4:

Na figura acima,  $G_1$  é euleriano (a trilha pode ser  $a-b-c-d-e-f-a-d-b-e-a$ ),  $G_2$  é semieuleriano (a trilha pode ser  $a-e-b-d-c-b-a-d-e$ ) e  $G_3$  não é euleriano, nem semieuleriano.

Já vimos que o problema (e o nome “euleriano”) se originou com o problema das pontes de Königsberg. Euler mostrou que a resposta era negativa, estabelecendo assim uma condição necessária.

Começamos por um lema simples porém necessário.

**Lema.** *Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples)  $G$  tem grau maior ou igual a 2, então  $G$  contém um ciclo.*

*Demonstração.* Se  $G$  contém laços ou arestas múltiplas, não há o que

provar, pois, automaticamente,  $G$  contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. À partir de um vértice  $v_0$ , qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado.  $\square$

E agora, o teorema.

**Teorema de Euler (Euler – 1736).** *Um grafo conexo (não necessariamente simples)  $G$  é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.*

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $G$  tenha uma trilha fechada de comprimento  $m$ . Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

( $\Leftarrow$ ) Usaremos indução sobre o número de arestas  $m$  do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando  $m = 0$ . Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que  $m$  arestas. Sendo  $G$  conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior,  $G$  contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas em  $G$  escolhemos uma trilha  $T$  com comprimento máximo. Se  $T$  tem comprimento  $m$ , o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo  $H$  resultante da retirada das arestas de  $T$ . Como retiramos um número

par de arestas de cada vértice de  $T$ , e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de  $H$  tem um vértice em comum com  $T$  e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução,  $H$  tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de  $H$ , e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando  $T$  com a trilha em  $H$ . Mas isto contraria a maximalidade na escolha de  $T$ .

□

**Corolário.** *Um grafo conexo (não necessariamente simples)  $G$  é semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.*

*Demonstração.* Deixada ao leitor. (SUGESTÃO: pense em acrescentar uma aresta a dois vértices de grau ímpar.)

Um algoritmo decorrente da demonstração do teorema acima assegura a construção de uma trilha fechada de comprimento  $m$  num grafo euleriano. A demonstração da correção do algoritmo pode ser encontrada em [6]. Podemos dar uma ideia do funcionamento do algoritmo e do motivo pelo qual ele funciona. Veja a figura 3.5. Começando nossa trilha pelo vértice  $a$  poderíamos percorrer  $abfcedcbefa$ , chegando a um beco sem saída. Repare que os graus eram todos pares e a retirada de um ciclo subtrai sempre números pares dos graus.

O grafo restante também tem vértices com grau par (veja ainda a figura 3.5).

Este resto pode ser percorrido pela trilha fechada  $dghijkcjd$ . Basta agora incluir essa trilha na trilha inicial onde está o vértice  $d$ .

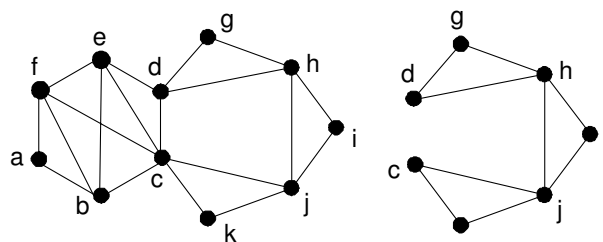


Figura 3.5:

Nossa trilha fica  $abfced(dghijkjhd)dcbefa$  (veja a figura 3.6).

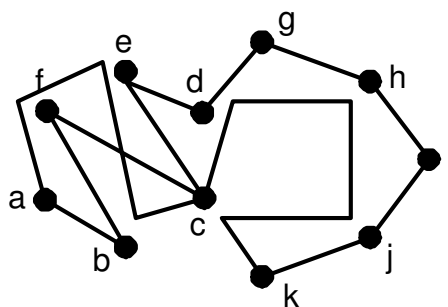


Figura 3.6:

**Exercício**

Na figura 3.7, quais grafos são eulerianos? Quais são semieulerianos? No caso dos semieulerianos, por onde devemos começar (terminar) nossa trilha?

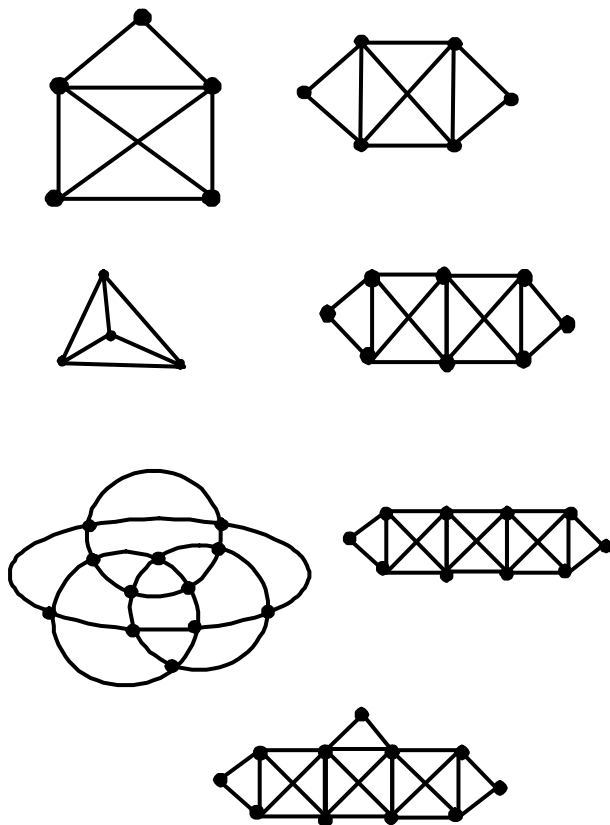


Figura 3.7:



### 3.4 O Problema Chinês do Carteiro

Esse problema é uma aplicação bastante importante do conceito de grafo euleriano. Usamos um grafo **valorado** onde às arestas é associado um **peso**, isto é, uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Este peso pode representar comprimento, custo, tempo, ou o que a modelagem do problema exigir. Já vimos este conceito no caso do algoritmo de Dijkstra.

O problema chinês do carteiro (que tem este nome por ter sido apresentado pela primeira vez por um pesquisador chinês e não pela nacionalidade do carteiro...) consiste em minimizar o esforço de um carteiro que percorre todas as ruas de uma cidade. Ora, se o grafo em questão é euleriano, não há problema. Mas se este não for o caso, teremos que *eulerizar* o grafo. Lembramos que o número de vértices de grau ímpar é par (veja o corolário na seção 2.3), logo poderemos unir pares destes vértices por novas arestas, tornando-os pares. É claro que não construiremos novas ruas! A ideia é fazer o carteiro percorrer ruas repetidas de forma econômica. O problema pode se complicar bastante, mas hoje há algoritmos que produzem resultados aproximados com bastante eficiência. É um problema bastante estudado devido à economia que uma boa solução pode gerar. Vamos ilustrar o caso mais simples possível, quando o grafo é semi-euleriano, isto é, quando tem apenas dois vértices de grau ímpar.

O menor caminho entre os vértices  $a$  e  $b$  (calculado pelo algoritmo de Dijkstra) indica que o melhor meio de eulerizar o grafo é construir uma “aresta virtual” entre  $a$  e  $b$ , o que significa simplesmente percorrer o caminho  $av_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4b$  como se fosse uma aresta. Assim,

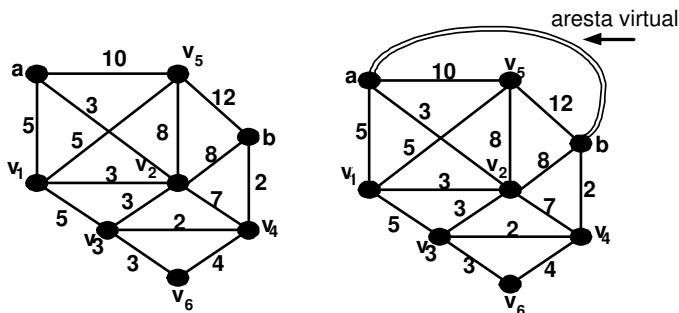


Figura 3.8:

gastaremos menos a sola do carteiro.

### 3.5 Grafos e Ciclos Hamiltonianos

Um problema aparentemente similar ao dos grafos eulerianos é o de procurar em  $G$  uma trilha fechada que passe por todos os vértices uma e só uma vez. Uma trilha assim teria de ser necessariamente um ciclo (salvo no caso do grafo nulo com um vértice); chamamos um tal ciclo de **ciclo hamiltoniano**. O nome homenageia Sir Willian R. Hamilton, que estudou e divulgou o problema – embora a primeira formulação tenha sido feita por Kirkman em 1885. As primeiras definições de grafo hamiltoniano e de grafo **semi-hamiltoniano** seguem as mesmas diretrizes dos grafos eulerianos. Um grafo e seu ciclo hamiltoniano aparecem na figura 3.9(a); um grafo semi-hamiltoniano aparece na figura 3.9(b).

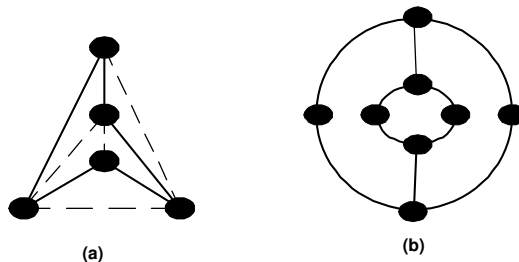
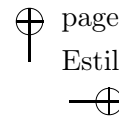
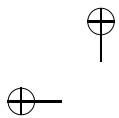
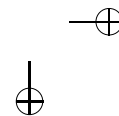
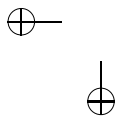


Figura 3.9:

As semelhanças, entretanto, param por aqui. O problema de saber se um grafo é ou não hamiltoniano é um dos mais estudados da teoria dos grafos por sua aplicabilidade em comunicação, transporte e planejamento. Entretanto, até hoje, nenhuma condição necessária e suficiente *elegante* para que um grafo seja hamiltoniano foi encontrada. Na verdade, todos os teoremas se encontram muito longe de oferecer uma previsão razoável de solução.

### 3.6 O Problema do Caixeiro Viajante – PCV

O PCV é um dos problemas mais estudados no campo da pesquisa operacional, mas até hoje não foi encontrado um algoritmo computacionalmente eficiente para resolvê-lo. Sua formulação é simples: dado um grafo completo valorado  $G$ , desejamos determinar o valor do menor ciclo hamiltoniano de  $G$ . Tomemos o exemplo dado pela seguinte matriz valorada de adjacência



|   | a   | b   | c   | d   | e   | f   | g   |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| a | XXX | 404 | 270 | 490 | 490 | 338 | 258 |
| b | 404 | XXX | 618 | 890 | 890 | 460 | 320 |
| c | 270 | 618 | XXX | 360 | 360 | 210 | 240 |
| d | 490 | 890 | 360 | XXX | 78  | 390 | 330 |
| e | 490 | 890 | 360 | 78  | XXX | 390 | 330 |
| f | 338 | 460 | 210 | 390 | 390 | XXX | 270 |
| g | 258 | 320 | 240 | 390 | 330 | 270 | XXX |

Como o grafo em questão é  $K_7$ , uma solução óbvia seria examinar todas as permutações entre os vértices, cada uma correspondendo a um ciclo hamiltoniano.

Com 7 vértices, teremos  $7! = 5760$  permutações; na verdade são  $6! = 820$ , pois são permutações circulares. Seja como for, é uma tarefa até modesta para um computador. Mas o PCV frequentemente trata de grafos com mais de 60 vértices. Isso nos daria  $60!$ , o que nos tomaria milênios, mesmo usando todos os computadores do mundo!

Nossa atitude será então de procurar um algoritmo heurístico, isto é, que usa uma ideia “razoável”, mesmo que não assegure a melhor solução, a solução ótima. A primeira tentativa é um **algoritmo guloso** que parte do ponto  $A$  e procura sempre a menor distância ao ponto da vez. No nosso caso, o ciclo produzido seria **a-g-c-f-g-b-d-e-a**, com valor 2470. A contraindicação para o algoritmo guloso é que no final terminamos por aceitar arestas de valores muito altos. Observamos, entretanto, que estamos à procura de um ciclo, e não temos portanto necessidade de agir sequencialmente. Uma outra tentativa heurística seria procurar agregar sempre a aresta de menor valor que não produza ciclo com menos de 7 vértices nem produza

vértices de grau 3 (num ciclo, todos os vértices são de grau 2). As escolhas recaem sobre:

| Aresta | Valor       |
|--------|-------------|
| DE     | 78          |
| CF     | 210         |
| CG     | 240         |
| GA     | 258         |
| AC     | Bifurcação  |
| FG     | Bifurcação  |
| AF     | Fecha ciclo |
| CD     | Bifurcação  |
| CE     | Bifurcação  |
| DF     | 390         |
| BE     | 890         |
| AB     | 404         |

O ciclo é **a-c-d-e-f-g-b-a** e o valor conseguido também é 2470. Isso foi coincidência, como veremos em outros exemplos. A ideia parecia boa e o resultado foi um pouco melhor. Entretanto, o melhor valor encontrado, examinando **todas** as possibilidades, corresponde ao ciclo **a-c-d-e-f-g-b-a** com o valor, bem inferior, de 2092.

É claro, se tivermos que examinar o PCV para 20 cidades teríamos que examinar cerca de  $20!$  permutações e já vimos que este é um número muito grande. Pior ainda, não foi descoberto até o momento um algoritmo eficiente para este problema (como no caso euleriano, em que o teorema de Euler nos salvou). E, ainda pior, os cientistas da computação acreditam que ele pertença a uma classe de problema para os quais não há uma solução “*elegante*”. Vamos falar um pouco sobre isto adiante.

### Exercício

Na figura 3.10 temos um grafo completo, valorado nas arestas, e desejamos encontrar o ciclo hamiltoniano com menor valor total (Problema do Caixeiro Viajante). Para isto, use os algoritmos gulosos descritos nesta seção e constate que o valor obtido é sempre maior do que o melhor valor (que pode ser encontrado por exame exaustivo).

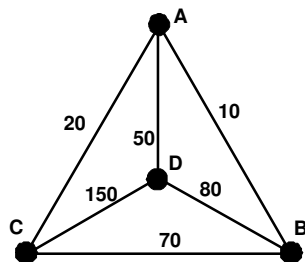


Figura 3.10:

## 3.7 Uma Palavra sobre Complexidade

A análise da complexidade de algoritmos é um assunto bastante técnico e que foge à intenção destas notas. Entretanto, as dificuldades enfrentadas por quem trabalha com problemas combinatórios (entre os quais os da teoria dos grafos) podem ser informalmente compreendidas. Já vimos fazendo isto quando falamos de soluções elegantes, eficiência computacional, enfim, sugerindo qualitativamente que certos problemas têm sido mais resistentes a uma abordagem algorítmica e computacional do que outros.

Um algoritmo é composto de passos elementares; se a totalidade dos passos exigidos por qualquer problema que este algoritmo resolva é dado por uma função polinomial do tamanho da entrada do algoritmo, um aumento de poder computacional pode reduzir significativamente o tempo utilizado.

Entretanto, se a totalidade dos passos do algoritmo, no pior dos casos, é uma função exponencial do tamanho da entrada, o aumento do poder computacional tem pouco efeito sobre o tempo de execução; basta um pequeno incremento na entrada para inutilizar o aumento computacional.

Dos algoritmos que já examinamos, o de pesquisa de menor distância (Dijkstra) é de complexidade polinomial assim como o da determinação se um grafo é ou não euleriano (e de sua exibição, se este for o caso). Para o PCV, entretanto, até hoje não foi descoberto um algoritmo polinomial; mais ainda, a maior parte dos pesquisadores acredita que isto não será mesmo possível.

Maior informação sobre complexidade computacional pode ser encontrada em Garey e Johnson [5].

### Exercícios

1. Uma ponte é uma aresta que, quando retirada, desconecta o grafo.

Dado um grafo conexo  $G$ , um vértice  $v$  será chamado de **vértice separador** quando a sua retirada resultar num grafo desconexo ou nulo. Prove que um grafo só tem uma ponte se tiver um

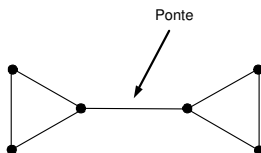


Figura 3.11:

vértice separador, mas a recíproca não é verdadeira.

2. Prove que dentre  $G$  e  $\overline{G}$ , pelo menos um é conexo.
3. Mostre que  $A^2$ , o quadrado da matriz de adjacência de um grafo, nos dá o número de caminhos de comprimento 2 entre cada par de vértices do grafo. Que número aparece na diagonal principal de  $A^2$ ? Qual o significado da matriz  $A^k$ ? (**Teorema de Festinger**).
4. Mostre que se um grafo tem  $2.k$  vértices de grau ímpar seu conjunto de arestas pode ser particionado em  $k$  caminhos disjuntos.
5. Para que valores de  $n$ ,  $p$  e  $q$  os grafos  $K_n$ ,  $K_{p,q}$ ,  $P_n$  são eulerianos? semieulerianos? hamiltonianos? semi-hamiltonianos?
6. Mostre que  $K_{i,j}$  é hamiltoniano se e só se  $i = j$ ; e que neste caso, existem  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$  ciclos hamiltonianos disjuntos.

*Observação:*  $\lfloor x \rfloor$  é o maior número inteiro menor ou igual a  $x$ . Por exemplo:  $\lfloor \frac{5}{7} \rfloor = 0$ ,  $\lfloor \frac{41}{3} \rfloor = 13$  e  $\lfloor \frac{6}{2} \rfloor = 3$ .

7. Seja o grafo  $Q_j = (X_j, U_j)$  no qual  $X_j = \{\text{vetores de } j \text{ coordenadas, cada uma igual a } 0 \text{ ou } 1\}$  e  $U_j = \{(v_j, w_j) | v_j \text{ difere de } w_j \text{ por uma só coordenada}\}$ .



A figura 3.12 mostra  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ .

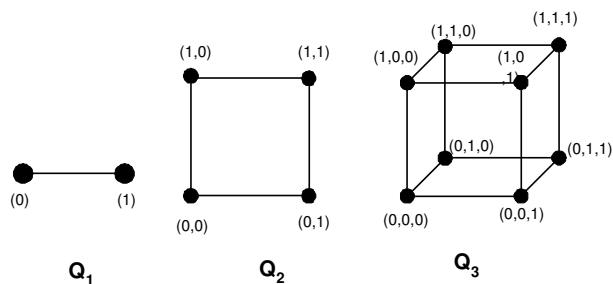


Figura 3.12:

- (a) Calcule  $n_j = |X_j|$  e  $m_j = |U_j|$ .
  - (b) Para que valores de  $j$  é  $Q_j$  euleriano? Justifique.
  - (c) Mostre que  $Q_j$  é bipartido.
  - (d) Para que valores de  $j$  é  $Q_j$  hamiltoniano? Justifique.
8. Mostre que o grafo de Petersen (ver figura 3.13) não é hamiltoniano.

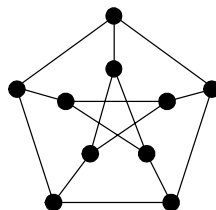


Figura 3.13:

- 9. Mostre que se  $G$  for euleriano,  $L(G)$  será hamiltoniano, mas a recíproca não é verdadeira.

# Capítulo 4

## Árvores

### 4.1 Definições e Caracterizações

Um dos tipos mais frequentes de grafos são as árvores, já definidos anteriormente como grafos conexos sem ciclos. Um grafo cujas componentes conexas são árvores é chamado de **floresta**.

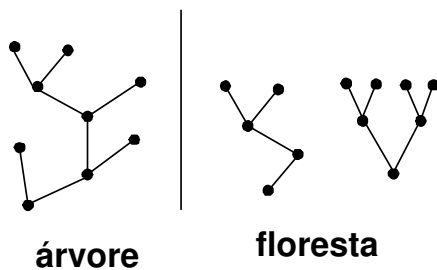


Figura 4.1:

Para um dado número de vértices  $n$ , uma árvore é o grafo conexo com menor número de arestas. As várias caracterizações das árvores podem ser reunidas no teorema a seguir.

**Teorema.** *Seja  $T$  um grafo com  $n$  vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $T$  é uma árvore.
- (ii)  $T$  não contém ciclos e tem  $n - 1$  arestas.
- (iii)  $T$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas.
- (iv)  $T$  é conexo e toda aresta é uma ponte.
- (v) Todo par de vértices de  $T$  é ligado por um único caminho.
- (vi)  $T$  não contém ciclos, mas a adição de uma aresta produz um único ciclo.

*Demonstração.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Pela definição de árvore,  $T$  não contém ciclos. Portanto, a retirada de uma aresta  $uv$  separa  $u$  de  $v$  e o grafo é separado em um par de árvores  $T'$  e  $T''$  com  $n'$  e  $n''$  vértices, respectivamente, tais que  $n = n' + n''$ . Por indução, o número de arestas de  $T'$  é  $n' - 1$  e o número de arestas de  $T''$  é  $n'' - 1$ . Acrescentando a aresta  $uv$ , concluímos que o número de arestas de  $T$  é, portanto,  $(n' - 1) + (n'' - 1) + 1 = n - 1$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Se  $T$  fosse desconexo, cada componente seria uma árvore. Por indução, o número de arestas em cada componente é inferior em uma unidade ao número de vértices e o número total de arestas seria inferior a  $n - 1$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): A retirada de qualquer aresta separa o grafo, pois  $n - 2$  arestas são insuficientes para conectar o grafo.

$(iv) \Rightarrow (v)$ : Se existisse mais de um caminho entre dois vértices, o grafo teria um ciclo e haveria uma aresta que não separaria o grafo.

$(v) \Rightarrow (vi)$ : Se  $T$  contivesse um ciclo, haveria um par de vértices ligado por mais de um caminho. A adição de uma aresta  $uv$ , concatenada com o caminho (único) entre  $u$  e  $v$ , produz um ciclo. Se este ciclo não fosse único, a retirada da aresta  $uv$  deixaria dois caminhos distintos entre  $u$  e  $v$ .

$(vi) \Rightarrow (i)$ : Basta mostrar que  $T$  é conexo. Se  $T$  fosse desconexo, uma aresta ligando duas componentes não produziria um ciclo.

□

## 4.2 Árvores Geradoras

### O Problema de Conexão de Peso Mínimo

Uma **árvore geradora** de uma componente conexa de um grafo  $G$ , com  $n$  vértices, é um subgrafo que é uma árvore com  $n - 1$  arestas; isto é, toca todos os vértices.

Vimos que um algoritmo “guloso” pode ser fácil de implementar, mas dificilmente dará um bom resultado (daí o nome...). Uma exceção ocorre na solução do seguinte problema: “Dado um grafo  $G$  valorado, qual a árvore geradora de menor valor?”. Por exemplo, se queremos realizar a ligação de computadores em rede a custo mínimo, que ligações deveremos fazer?

A resposta será uma árvore geradora, é claro. Mas qual?

O grafo da figura 4.2 mostra o custo entre as ligações de um grafo  $K_5$ .

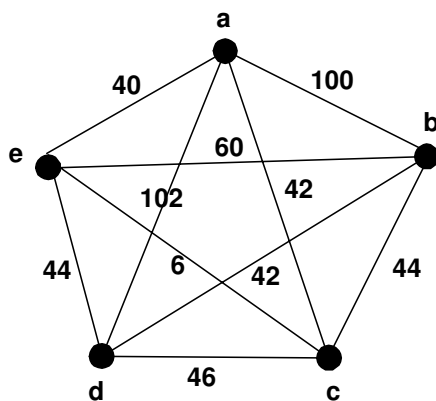


Figura 4.2:

Para resolver o problema, usaremos o **algoritmo de Kruskal**. Este algoritmo consiste em tomar a aresta de menor valor; se ela não forma ciclo, a acrescentamos à nossa árvore. Caso contrário, nós a desprezamos. Quando tivermos conseguido  $n - 1$  arestas, nossa árvore estará pronta.

No nosso caso:

$$c \rightarrow e \Rightarrow 6$$

$$a \rightarrow e \Rightarrow 40$$

Agora há um empate entre  $a - c$  e  $b - d$ . Podemos escolher qualquer uma.

$$a \rightarrow c \Rightarrow \text{forma ciclo.}$$

$$b \rightarrow d \Rightarrow 42$$

Temos outro empate, agora entre  $b - c$  e  $d - e$ . Podemos escolher qualquer uma.

$$b \rightarrow c \Rightarrow 44$$

Ja temos 4 arestas. Nossa árvore está completa.

Total: 132

Nossa árvore ficará assim:

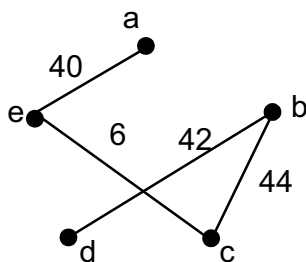


Figura 4.3:

**Teorema.** *O algoritmo de Kruskal fornece uma solução ótima para o problema da conexão de peso mínimo.*

*Demonstração.* O algoritmo, evidentemente, fornece uma árvore geradora  $T$ . Suponhamos que  $T$  não tenha peso mínimo, isto é, existe uma árvore geradora  $T'$  tal que o peso de  $T'$  é menor do que o peso de  $T$ . Seja  $e$  a primeira aresta escolhida para  $T$  que não pertence a  $T'$ . Se adicionarmos  $e$  a  $T'$  obtemos um ciclo que contém uma aresta  $e_k$  que não está em  $T$ . Retiramos a aresta  $e_k$  e temos uma árvore

$T''$  com peso menor que  $T$ . Mas neste caso, esta aresta  $e_k$  teria sido escolhida pelo algoritmo no lugar de  $e$ , o que mostra que o algoritmo constrói efetivamente uma árvore de menor peso.  $\square$

Um algoritmo guloso pode ser usado para obter um limite inferior para o PCV. Como um ciclo é um caminho adicionado de uma aresta, um limite inferior para o PCV é dado pelo valor da árvore geradora mínima (obtido por um algoritmo guloso) mais o menor valor de uma aresta não usada na árvore.

### Exercícios

1. Desenhe todas as árvores com 6 vértices e com 7 vértices.
2. Mostre que um grafo conexo, com  $n$  vértices e  $m$  arestas, tem, no mínimo,  $m - n + 1$  ciclos distintos.
3. Determine todas as árvores geradoras do grafo da figura 4.4.

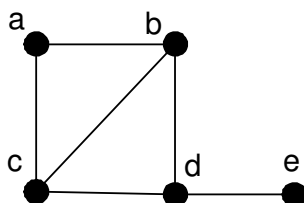


Figura 4.4:

4. (a) Mostre que toda árvore é um grafo bipartido.  
(b) Quais árvores são também grafos bipartidos completos?

5. Como podemos adaptar o algoritmo de Kruskal para obter o valor de uma árvore geradora de valor máximo?
6. Prove que um grafo conexo é uma árvore se, e somente se, tem uma única árvore geradora.
7. Prove que uma árvore com  $\Delta > 1$  tem, no mínimo,  $\Delta$  vértices pendentos.
8. Prove que uma árvore em que exatamente 2 vértices não são vértices separadores é um caminho.



## Capítulo 5

# Subconjuntos Especiais de um Grafo

### 5.1 Conjuntos Independentes

Já vimos, pelo menos, um exemplo de subconjunto notável de um grafo: um subgrafo independente, no qual nenhum par de vértices está ligado. Um conjunto independente pode desempenhar papel importante em uma modelagem.

Suponhamos que um grafo represente a incompatibilidade de horários entre professores que devem dar prova final; os vértices  $x$  e  $y$  estarão ligados se representarem professores que têm alunos em comum para ministrar a prova. Qual o maior número de professores que podem dar prova ao mesmo tempo? A resposta é dada pelo subconjunto independente máximo de vértices do grafo.

O subconjunto assinalado com quadrados negros no grafo da figura 5.1 mostra um conjunto com estas características. O **número de independência**  $\alpha(G)$  é a cardinalidade do subconjunto independente máximo de vértices do grafo. No nosso exemplo (figura 5.1),

$$\alpha(G) = 4.$$

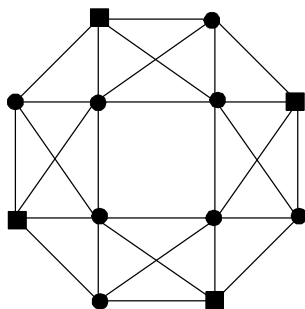


Figura 5.1:

Aplicações do conceito de conjunto independente surgem quando, por exemplo, desejamos evitar duplicação de esforços. Suponhamos que num parque, representado pelo grafo da figura 5.2, eu quisesses instalar barracas para venda de sorvete. A operadora das barracas faz as seguintes restrições:

- Uma barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice).
- Esquinas próximas (vértices adjacentes) só admitem uma barraca.

Estamos procurando então um conjunto independente. Para instalar o máximo de barracas procuramos um conjunto independente máximo. Já vimos que esta pode ser uma tarefa complexa. Na figura 5.3 a configuração da esquerda mostra um conjunto independente **maximal**, isto é, não podemos acrescentar mais barracas de sorvete. Mas a configuração da direita também é independente e contém quase o dobro de barracas.

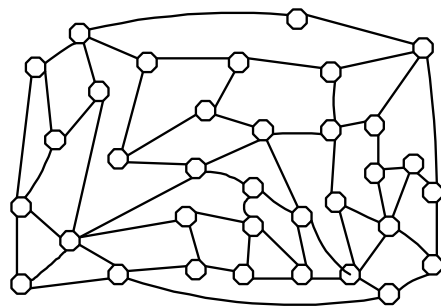
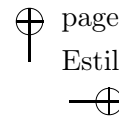
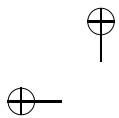


Figura 5.2:

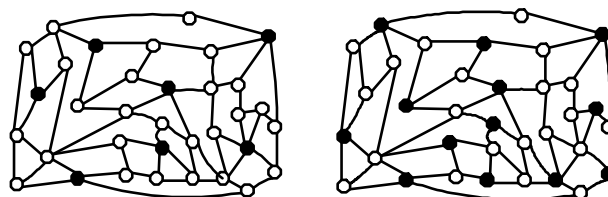
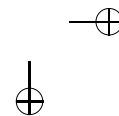
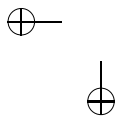


Figura 5.3:



## 5.2 Coloração

Suponha, no exemplo anterior, que quiséssemos saber qual o menor número de horários necessários para ministrar as provas. Para isto, devemos resolver o problema de particionar o conjunto de vértices do grafo em subconjuntos independentes; cada conjunto corresponderá a um horário de prova. Uma forma de resolver o problema é atribuir cores aos vértices de forma que vértices adjacentes tenham necessariamente cores diferentes. O menor número de cores que se pode utilizar será portanto a solução do problema.

**Observação.** *Não precisamos efetivamente “colorir” os vértices, basta atribuir um número ou um símbolo aos vértices.*

Podemos colorir os vértices com 12 cores (uma para cada vértice), mas o menor número possível de cores é 4 (veja a figura 5.1). O menor número de cores para colorir os vértices de um grafo  $G$  é chamado **número cromático** de  $G$  e denotado por  $\chi(G)$ . No caso,  $\chi(G) = 4$ .

**Teorema.** *Para todo grafo  $G$ , tem-se que  $\chi(G) \leq \Delta + 1$ .*

*Demonstração.* Colorimos vértice por vértice. Cada vértice pode ser adjacente a, no máximo,  $\Delta$  vértices. Podemos sempre encontrar uma cor com a qual colorir o vértice da vez.  $\square$

A demonstração acima fornece um algoritmo para colorir um grafo com  $\Delta + 1$  cores.

Apresentamos, sem demonstrar, um teorema clássico que reduz um pouco o limite acima.

**Teorema (Brooks – 1941).** *Se  $G$  é um grafo conexo que não seja  $K_n$  e tal que  $\Delta(G) \geq 3$ , então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

**Teorema.** *Um grafo  $G$  é bipartido se, e somente se,  $\chi(G) = 2$ .*

*Demonstração.* Basta fazer corresponder cada uma das partições independentes de  $G$  a uma cor.  $\square$

### 5.3 Aplicações de Coloração

As aplicações de coloração aparecem quando precisamos repartir o conjunto de vértices em conjuntos de vértices independentes disjuntos. Voltando ao problema do parque da Seção 6.1, suponha que quiséssemos instalar barracas de sorvete, pipocas, cachorro-quente etc. As restrições agora serão:

- Uma barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice).
- Esquinas próximas (vértices adjacentes) só admitem barracas com serviços diferentes.

Por motivos comerciais, queremos evitar a diversificação excessiva de serviços. Qual seria o menor número de serviços que poderíamos usar? Vemos na figura 5.4 que podemos colorir os vértices com apenas 3 cores. Este número é mínimo pois o grafo inclui um subgrafo isomorfo a  $K_3$ .

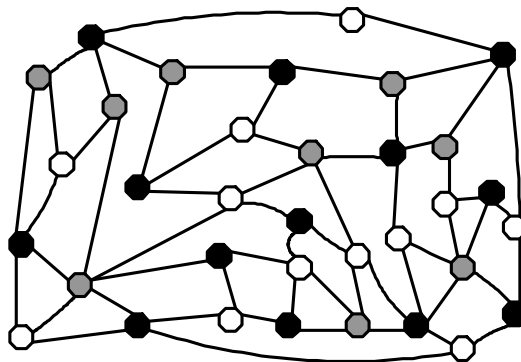


Figura 5.4:

Uma outra aplicação clássica de coloração é o problema dos exames. A tabela abaixo mostra a alocação de alunos nos exames finais que eles devem prestar:

| Alunos     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| Matemática | X |   |   |   |   |   |   | X |   |    |    | X  |    |    | X  |    |
| Português  | X |   |   | X |   |   |   |   |   |    | X  |    |    |    |    | X  |
| Inglês     |   |   |   |   |   | X | X |   |   | X  |    |    |    |    | X  |    |
| Geografia  |   |   |   | X | X |   | X |   | X |    |    |    | X  |    |    |    |
| História   |   |   | X |   |   |   |   |   |   | X  |    | X  |    | X  |    | X  |
| Física     |   |   | X |   | X |   |   |   |   |    |    |    | X  |    |    |    |
| Química    |   | X |   |   |   |   |   | X | X |    | X  |    |    | X  |    |    |
| Biologia   |   | X |   |   |   | X |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |

Duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não houver alunos comuns. Vamos construir um grafo com os vértices  $\{M, P, I, G, H, F, Q, B\}$ ; dois vértices estarão ligados se tiverem um aluno em comum.

A figura 5.5 mostra uma partição dos vértices em dois conjuntos independentes disjuntos. Os exames podem ser realizados em 2 horários, um para  $\{B, G, H, M\}$  e outro para  $\{F, I, P, Q\}$ .

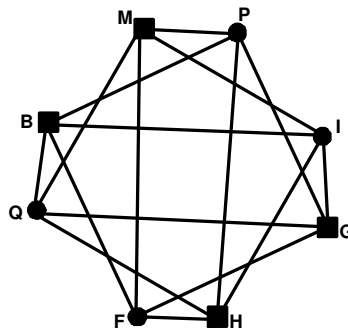


Figura 5.5:

Uma outra aplicação é a determinação de períodos de um sinal de trânsito. O desenho abaixo representa um cruzamento. As direções permitidas estão assinaladas por setas. Veja a figura 5.6.

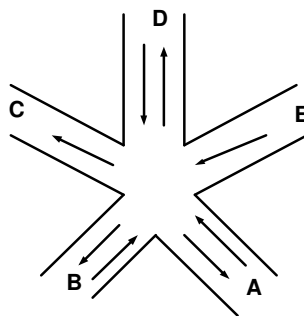


Figura 5.6:

Como organizar o trânsito? Vamos formar um grafo de incompatibilidade. Os vértices serão as direções possíveis:

$$V = AB, AC, AD, BA, BC, BD, DA, DB, DC, EA, EB, EC, ED$$

Ligamos dois vértices sempre que as direções forem incompatíveis (por exemplo  $AD$  e  $EB$ ). Veja a figura 5.7.

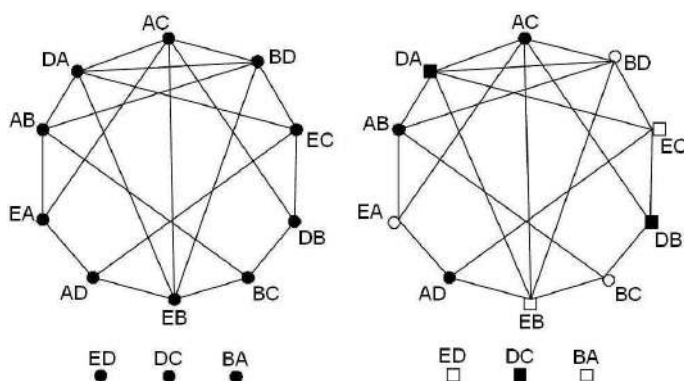


Figura 5.7:

Observe que  $BA$ ,  $DC$  e  $ED$  são compatíveis com todas as direções, sendo por isso vértices isolados. Uma coloração dos vértices corresponde a uma divisão em períodos. Poderíamos usar 13 cores, uma para cada direção, mas isso seria um desperdício de tempo. Como os vértices  $AC$ ,  $BD$ ,  $DA$  e  $EB$  formam um  $K_4$  precisamos de pelo menos 4 cores. A partição em conjuntos independentes  $\{AB, AC, AD\}$ ,  $\{BC, BD, EA\}$ ,  $\{BA, EB, EC, ED\}$ ,  $\{DA, DB, DC\}$  mostra que de fato 4 cores (4 períodos) são suficientes, isto é,  $\chi(G) = 4$ .

### Exercícios

1. O dono de uma loja de animais comprou uma certa quantidade de peixes ornamentais de diversas espécies. Alguns destes peixes



não podem ficar no mesmo aquário. A compatibilidade entre as espécies está retratada na tabela a seguir, onde X significa que as espécies não devem ficar no mesmo aquário.

- (a) Qual o menor número de aquários necessário para abrigar sem problemas todos os peixes?
- (b) É possível distribuir os peixes de forma que cada aquário tenha (aproximadamente) o mesmo número de peixes?

|   | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A |   |   |   |   |   | X | X |   | X |
| B |   |   | X |   |   |   |   | X |   |
| C |   | X |   |   | X |   |   | X |   |
| D |   |   |   |   | X | X |   | X |   |
| E |   |   | X | X |   |   | X |   |   |
| F | X |   |   | X |   |   | X |   | X |
| G | X |   |   |   | X | X |   | X | X |
| H |   | X | X | X |   |   | X |   |   |
| I | X |   |   |   |   | X | X |   |   |

- 2. Para os cruzamentos da figura 5.8, dê uma seqüência econômica de períodos para o sinal de trânsito.

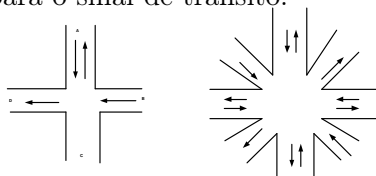


Figura 5.8:

3. Determine o número cromático dos grafos da figura 5.9.

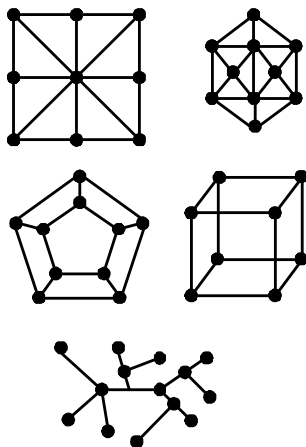


Figura 5.9:

## 5.4 Cliques

Uma **clique** de  $G$  é um subgrafo completo de  $G$ . O número de vértices da clique máxima é o **número de clique** de  $G$ , denotado por  $\omega(G)$ . Note-se que uma clique de  $G$  corresponde a um conjunto independente em  $\overline{G}$ , isto é  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ .

## 5.5 Acoplamentos

Da mesma forma que selecionamos um conjunto independente de vértices, podemos considerar um conjunto independente de arestas,

isto é, de arestas não incidentes duas a duas. Um conjunto deste tipo é chamado um **acoplamento** do grafo  $G$ .

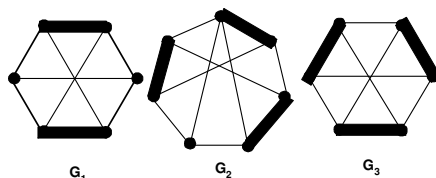


Figura 5.10:

Na figura 5.10 o acoplamento em  $G_1$  é **maximal** (pois não pode ser aumentado) mas não é máximo. O acoplamento em  $G_2$  é máximo, mas não toca todos os vértices; os que são tocados são ditos **vértices saturados** e os outros **vértices não saturados**. O acoplamento em  $G_3$  é máximo e satura todos os vértices; dizemos então que é um acoplamento **perfeito**. O **número de acoplamento** de um grafo  $G$ , denotado por  $\alpha'(G)$ , é a cardinalidade do maior acoplamento de  $G$ .

**Observação.** Note a diferença entre os conceitos de **máximo** (o conjunto de maior cardinal possível dentro das condições exigidas) e **maximal** (um conjunto que não pode ser aumentado sem violar as condições exigidas). A mesma ideia se aplica a conjuntos **mínimos** e **minimais**.

Dado um grafo  $G$  e um acoplamento  $M$ , um **caminho  $M$ -aumentante** em  $G$  é um caminho que liga dois vértices não saturados por  $M$  que alternam arestas de  $M$  e arestas de  $G - M$ .

**Teorema (Berge).** *Um acoplamento  $M$  de um grafo  $G$  é máximo se, e somente se, não contém um caminho  $M$ -aumentante.*

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ ) Se há um caminho  $M$ -aumentante, podemos obter um acoplamento uma unidade maior adicionando as arestas do caminho fora de  $M$  ao acoplamento e retirando as arestas em  $M$  do acoplamento. A definição de caminho aumentante garante que o resultado é ainda um acoplamento.

( $\Leftarrow$ ) Se  $M$  não é máximo, então existe  $M'$  máximo. Considere  $D = M \Delta M'$ , a diferença simétrica entre  $M$  e  $M'$  (isto é, o conjunto de arestas de  $M$  e  $M'$  que não pertencem a  $M \cap M'$ ); como são acoplamentos, os vértices em  $D$  têm grau no máximo 2. Logo, as componentes de  $D$  são ciclos pares (alternam arestas de  $M$  e  $M'$ ) ou caminhos. Como  $|M'| \geq |M|$ , uma das componentes, ao menos, é um caminho alternando arestas de  $|M'|$  e  $|M|$  começando e terminando em  $M'$ . Este é um caminho  $M$ -alternante.  $\square$

## 5.6 Acoplamentos em Grafos Bipartidos

O acoplamento modela situações em que formamos pares; se o grafo  $G$  for bipartido, o acoplamento assume a forma de formação de casais, e é estudado de forma ligeiramente diferente. Seja  $G$  um grafo bipartido com partições dos vértices  $X$  e  $Y$ . Dizemos que temos um **acoplamento de  $X$  em  $Y$**  quando um acoplamento de  $G$  satura  $Y$  (mas não necessariamente  $X$ ).

Apresentamos o seguinte teorema, sem demonstração.

**Teorema.** *Se  $G$  é um grafo bipartido com partições de vértices  $X$  e  $Y$ , então  $G$  tem um acoplamento de  $X$  em  $Y$  se, e somente se,  $|N(S)| \geq |S|$ ,  $\forall S \subseteq X$ , sendo  $N(S)$  a vizinhança aberta de  $S$ .*

*Demonstração.* Ver em West [6].

A condição deste teorema é também conhecida como **Condição de Hall**.

**Teorema.** *Se  $k > 0$ , qualquer grafo  $k$ -regular bipartido admite um acoplamento perfeito.*

*Demonstração.* Começamos contando as arestas pelas extremidades em  $X$  e  $Y$ , as partições de vértices. Cada aresta tem uma extremidade em  $X$  e outra em  $Y$ , logo  $k \cdot |X| = k \cdot |Y|$  e, portanto,  $|X| = |Y|$ . Só precisamos então provar a condição de Hall. Considere  $S \subseteq X$ , tal que haja  $r$  arestas entre  $S$  e  $N(S)$ . Como  $G$  é  $k$ -regular, temos que  $r = k|S|$ . Do lado de  $Y$  temos  $r \leq k \cdot |N(S)|$ . Logo,  $k \cdot |S| \leq k \cdot |N(S)|$  e, finalmente,  $|S| \leq |N(S)|$ .  $\square$

## 5.7 Coloração de Arestas

Suponhamos que num grupo de pessoas várias duplas devam ser formadas para cumprir determinadas tarefas num laboratório. O grafo da figura 5.11 ilustra esta situação. Observe que uma mesma

peessoa pode ter que cumprir uma tarefa em diversas duplas. Cada tarefa destas necessita de 1 hora para ser executada. Qual o menor número de horas necessárias para que todas as tarefas sejam realizadas?

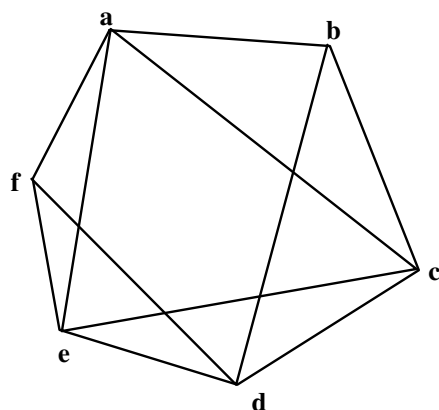


Figura 5.11:

As arestas representam as duplas e, como cada indivíduo só pode trabalhar em uma tarefa de cada vez, tarefas executadas simultaneamente correspondem a um acoplamento. Podemos fazer corresponder uma cor a cada horário (já sabemos que esta cor pode ser um número ou um símbolo) e nossa pergunta passa a ser:

“Qual o mínimo de cores para colorir as arestas do grafo de modo que arestas incidentes num mesmo vértice recebam cores diferentes?”

O menor número usado para colorir (propriamente) as arestas de um grafo é chamado índice cromático do grafo, notado por  $\chi'(G)$ . No nosso exemplo conseguimos colorir as arestas com 4 cores (veja figura

5.12) – que é evidentemente o menor número possível pois o vértice  $a$  tem quatro arestas incidentes. Logo  $\chi'(G) = 4$ . Os horários ficariam assim distribuídos:

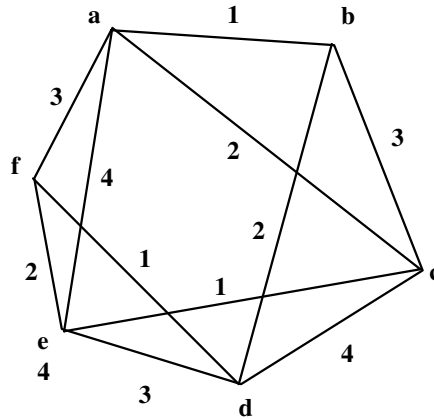


Figura 5.12:

| Horário(cor) | Duplas     |
|--------------|------------|
| 1            | ab, ce, df |
| 2            | ac, bd, ef |
| 3            | af, bc, de |
| 4            | ae, cd     |

Pelo que vimos acima, fica claro que  $\chi'(G) \geq \Delta$ . O teorema a seguir (que apresentamos sem demonstração) nos dá um limite superior bem estreito.

**Teorema (Vizing).** *Para qualquer grafo  $G$ , tem-se que*

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1.$$

*Para grafos bipartidos, entretanto,  $\chi'(G)$  é conhecido.*

**Teorema (Vizing).** *Para qualquer grafo  $G$  bipartido,  $\chi'(G) = \Delta$ .*

*Demonstração.* Suponha que estamos colorindo as arestas uma por uma, dispondo de  $\Delta$  cores. Ao colorir a aresta  $xy$  tentaremos encontrar uma cor que não esteja presente em arestas incidentes a  $x$  e nem em arestas incidentes a  $y$ . Se for possível, tudo bem. Se este não for o caso, observemos que as arestas incidentes a  $x$  ocupam no máximo  $\Delta - 1$  cores (pois  $xy$  não está colorida), o mesmo acontecendo com  $y$ . Isto nos garante que há uma aresta incidente a  $x$  que está colorida com a cor  $c_x$ , ausente nas arestas incidentes em  $y$ ; por seu lado, existe uma cor  $c_y$  presente nas arestas incidentes em  $y$  e ausente nas arestas incidentes a  $x$ . Formemos uma cadeia de arestas começando em  $x$  e alternando arestas de cor  $c_x$  e  $c_y$  (esta cadeia pode até, eventualmente, só possuir uma aresta). Com o grafo bipartido, as arestas  $c_x$  vão de uma partição para outra e as arestas  $c_y$  retornam à primeira partição. Como  $c_x$  está ausente em  $y$ , esta cadeia não passa pelo vértice  $y$ . Podemos então recolorir a cadeia intercambiando as cores  $c_x$  e  $c_y$ , sem afetar a propriedade da coloração. Depois deste intercâmbio a cor  $c_x$  estará ausente em  $x$  e  $y$  e podemos colorir a aresta  $xy$ . Isto mostra que todas as arestas podem ser coloridas utilizando apenas  $\Delta$  cores.  $\square$



**Observação.** *A técnica desta demonstração se baseia numa ideia de Kempe e retornaremos a ela quando falarmos do Problema das 4 cores no capítulo sobre planaridade.*

Uma aplicação conhecida da coloração de arestas é o problema dos exames orais. Três professores devem examinar 6 estudantes, segundo a seguinte lista:

|              |         |
|--------------|---------|
| Professor 11 | A, C, D |
| Professor 22 | A, C    |
| Professor 33 | A, B, D |

A cada hora um professor chama um dos alunos para ser examinado. Dois professores não podem examinar um aluno e cada professor examina apenas um aluno. Qual o menor espaço de tempo que podemos utilizar? Usaremos um modelo de grafo bipartido (veja figura 5.13) – de um lado os professores, do outro os alunos. Uma coloração das arestas representa uma divisão de horários. A coloração  $\{P1A, P2C, P3D\}$ ,  $\{P1C, P2A, P3B\}$ ,  $\{P1D, P2E, P3F\}$ , é uma partição das arestas em acoplamentos disjuntos – o que é garantido pelo teorema demonstrado anteriormente.

Outro problema clássico da coloração de arestas é a organização de passeios por duplas. Suponha que um batalhão com  $2.t$  soldados sai para marchar todo dia. Quantos passeios podemos fazer de modo que cada soldado tenha sempre um companheiro diferente? Este número é, no máximo  $2.t - 1$  pois este é o número de companheiros que cada soldado tem. Veremos que este é o número exato. Para melhor enxergar este fato vamos dar o exemplo com  $t = 3$ , isto é, com 6 soldados.

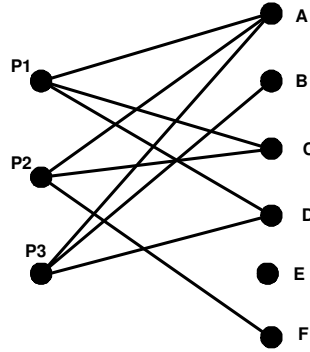


Figura 5.13:

Se pensarmos em todas as duplas possíveis estamos pensando no grafo  $K_6$ , os soldados sendo os vértices e as arestas as duplas. Um passeio corresponderá a um acoplamento perfeito e uma coloração das arestas usando acoplamentos perfeitos nos dará o número possível de passeios. Desenhamos  $K_6$  da seguinte forma:

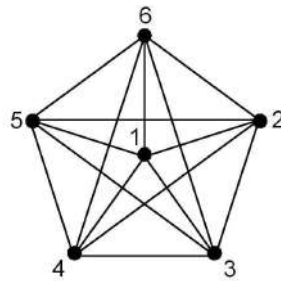


Figura 5.14:

Os acoplamentos são obtidos pelas arestas paralelas e perpendiculares (figura 5.15):



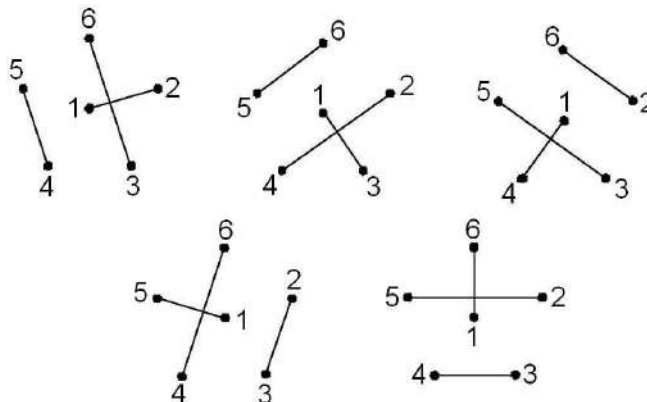


Figura 5.15:

A coloração produzida é:

$$\{12, 36, 45\}, \{13, 24, 56\}, \{14, 26, 35\}, \{15, 23, 46\}, \{16, 25, 34\}$$

### Exercícios

1. Exiba uma coloração mínima das arestas de  $K_{10}$ .
2. (Índice cromático de  $K_{2t-1}$ )
  - (a)  $K_5$  tem 5 vértices e 10 arestas. Um acoplamento de  $K_5$  pode ter no máximo ..... arestas.
  - (b) Para uma coloração das 10 arestas de  $K_5$  precisamos de (no mínimo) ..... acoplamentos (cores).
  - (c) Mostre que para obter uma coloração de  $K_5$  basta tomar

uma coloração de  $K_6$  e desconsiderar as arestas que contenham o vértice 6.

(d) Mostre que:

- $\chi'(K_t) = t - 1$ , se  $t$  é par.
- $\chi'(K_t) = t$ , se  $t$  é ímpar.

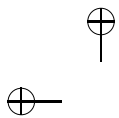
## 5.8 Outros Subconjuntos

Outros tipos de subconjuntos e de invariantes têm sido estudados. Citaremos apenas três.

- Coberturas de vértices – É um subconjunto de vértices tal que toda aresta é incidente a um vértice do conjunto. O **número de cobertura de vértices** de um grafo  $G$ , denotado por  $\beta(G)$ , é a cardinalidade da maior cobertura de vértices de  $G$ .
- Coberturas de arestas – É um subconjunto de arestas tal que todo vértice é tocado por uma aresta do conjunto. O **número de cobertura de arestas** de um grafo  $G$ , denotado por  $\beta'(G)$ , é a cardinalidade da maior cobertura de arestas de  $G$ .
- Conjuntos dominantes – É um subconjunto de vértices tal que todo vértice do grafo está no conjunto ou é adjacente a um de seus vértices. O **número de dominância** de um grafo  $G$ , denotado por  $\gamma(G)$ , é a cardinalidade do maior conjunto dominante de  $G$ .

## Exercícios

1. Qual o número de independência  $\alpha(Pet)$  do grafo de Petersen?
2. Qual o número de coloração  $\chi(Pet)$  do grafo de Petersen?
3. Apresente um acoplamento maximal do grafo de Petersen com 3 arestas. Encontre caminhos aumentantes que forneçam acoplamentos de 4 e 5 arestas.
4. Prove que  $\frac{n}{2} \leq \chi(G) \leq n - \alpha + 1$
5. Mostre que se  $K_t$  é subgrafo de  $G$ , então  $\chi(G) \geq t$ . É verdade que se  $\chi(G) = t$ , então  $K_t$  é subgrafo de  $G$ ?
6. O **índice cromático** do grafo  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ , é o menor número de cores com que podemos colorir as arestas de maneira que duas arestas incidentes tenham cores diferentes.
  - (a) Calcule  $\chi'(K_n)$ .
  - (b) Calcule  $\chi'(Pet)$ , o índice cromático do grafo de Petersen.
7. (a) Prove que um conjunto independente maximal é um conjunto dominante.  
 (b) Prove que um conjunto dominante minimal pode não ser um conjunto independente.
8. Mostre que:
  - (a)  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ .
  - (b)  $\alpha(G) \leq \beta'(G)$ .



(c)  $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq n$ .

(d)  $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$ .



## Capítulo 6

# Grafos Planares

### 6.1 Definições e Resultados Simples

Um **grafo planar** é um grafo que admite uma representação gráfica em que as arestas só se encontrem (possivelmente) nos vértices a que são incidentes. Exemplos clássicos de grafos planares são dados pelos grafos que representam os poliedros. Na figura 6.1, apresentamos os grafos dos 5 sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

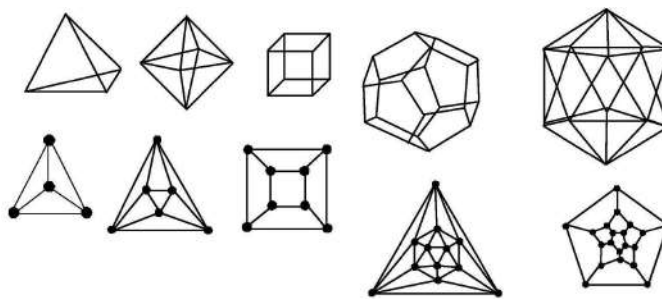


Figura 6.1:

Uma pergunta que pode ser feita é se existe um grafo que não seja planar. Mostraremos que o grafo  $K_5$  não é planar. De fato, qualquer representação de  $K_5$  deverá ter um ciclo de comprimento 5 que divida o plano em “interior” e “exterior.” Só conseguimos colocar duas arestas no interior sem que se cruzem; no exterior, a situação é a mesma. Nos sobra uma aresta.

Quantas arestas pode ter um grafo planar? Uma representação gráfica de um grafo com pelo menos um ciclo separa o plano em regiões (no caso das árvores, temos uma única região). Estas regiões são chamadas **faces**; não devemos esquecer que uma das faces é tudo que “sobra” do plano – é a **face ilimitada**. O número de faces de um grafo será designado por  $f$ . A figura 6.2 mostra duas representações do mesmo grafo, ilustrando que qualquer face pode ser colocada como face ilimitada.

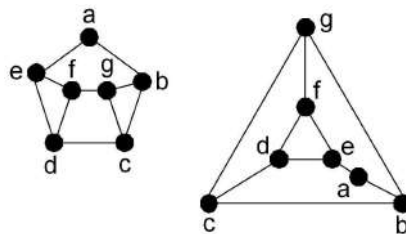


Figura 6.2:

Para grafos planares, vale a relação de Euler para poliedros convexos.

**Teorema de Euler.** *Num grafo planar conexo vale  $f - m + n = 2$ .*



*Demonstração.* Demonstraremos o teorema por indução sobre o número de arestas. Tomemos um grafo conexo qualquer. Se for uma árvore, temos  $f - m + n = 1 - (n - 1) + n = 2$ . Se houver um ciclo, retiramos uma aresta do ciclo, e o grafo fica com uma face a menos, mas pela hipótese de indução a relação vale para o novo grafo. Temos então  $(f - 1) - (m - 1) + n = 2$  e, portanto,  $f - m + n = 2$ .  $\square$

Observamos que podemos acrescentar arestas a um grafo planar sempre que uma porção do plano estiver limitada por um ciclo de comprimento maior do que 3. Logo, um **grafo maximal planar** (i.e., um grafo ao qual não poderemos acrescentar arestas sem comprometer a planaridade) tem uma representação composta por ciclos de comprimento 3. Isto nos dá outra relação importante.

**Teorema.** *Num grafo planar conexo  $G$  vale  $m \leq 3.n - 6$ ; a igualdade vale se  $G$  é maximal planar.*

*Demonstração.* Se formos contar as arestas de cada face, contaremos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face tem no mínimo 3 arestas (a igualdade valendo no caso maximal) temos:

$$3.f \leq 2.m.$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$f - m + n = 2,$$

$$3.f - 3.m + 3.n = 6,$$

$$2.m - 3.m + 3.n \geq 6,$$

$$m \leq 3.n - 6.$$

□

Este teorema nos dá outra demonstração de que  $K_5$  não é planar. De fato,  $K_5$  (e de resto todos os grafos completos com mais do que 4 vértices) não obedece à relação acima:  $10 > 3.5 - 6$ .

**Teorema.** *Num grafo planar bipartido conexo  $G$  vale*

$$m \leq 2.n - 4.$$

*Demonstração.* Observamos que um grafo bipartido só tem ciclos pares. Cada face tem no mínimo 4 arestas.

$$4.f \leq 2.m.$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$f - m + n = 2,$$

$$4.f - 4.m + 4.n = 8,$$

$$2.m - 4.m + 4.n \geq 8,$$

$$m \leq 2.n - 4.$$

□

Vemos agora que  $K_{3,3}$  não é planar, pois  $9 > 2.6 - 4$ . O problema das casinhas, na introdução, acaba de ser resolvido.

## 6.2 Teorema de Kuratowski

A ideia de planaridade é aparentemente topológica, mas sempre pairou a questão sobre se haveria uma caracterização combinatória dos grafos planares. A resposta foi dada através de um teorema, que apresentaremos, sem demonstração, depois de algumas definições.

Uma **subdivisão** do grafo  $G$  é o grafo  $G'$  que obtemos pela inserção de  $P_2$  (caminho de comprimento 2) no lugar de uma aresta de  $G$ . Um grafo  $G'$  é dito **homeomorfo** ao grafo  $G$  se  $G'$  puder ser obtido de  $G$  por sucessivas operações de subdivisão (veja figura 6.3)

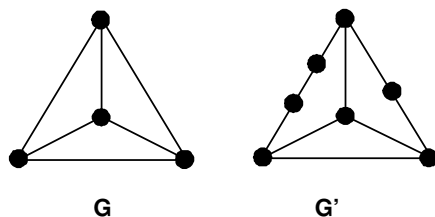


Figura 6.3:

**Teorema (Kuratowski).** *Um grafo é planar se não contiver subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ou a  $K_{3,3}$ .*

*Demonstração:* Ver em Fournier[7].

Como aplicação mostramos na figura 6.4 que o grafo de **Petersen** não é planar.

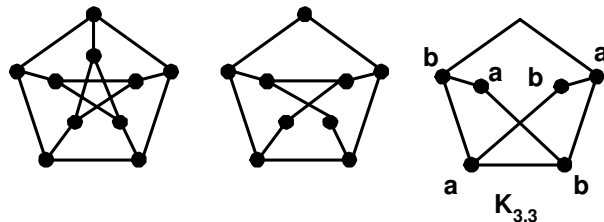


Figura 6.4:

Observamos que embora tenhamos tratado o exemplo graficamente, a verificação das condições do teorema pode ser feita de forma computacional (embora possa ser complexa).

### 6.3 Dualidade

O **Dual**  $G^D$  de um grafo simples planar  $G$  é o grafo construído da seguinte maneira:

- (i) A cada face de  $G$  associamos um vértice em  $G^D$ .
- (ii) A cada aresta de  $G$  (que separa duas faces) associamos uma aresta em  $G^D$  ligando os vértices correspondentes às faces.

Um bom exemplo são os sólidos platônicos apresentados na figura 6.4. O cubo é o dual do octaedro, o icosaedro é o dual do dodecaedro e o tetraedro é o dual dele mesmo (autodual). Esses duais correspondem aos duais da geometria clássica. A figura 6.5 mostra a correspondência entre as faces do cubo e os vértices do octaedro.

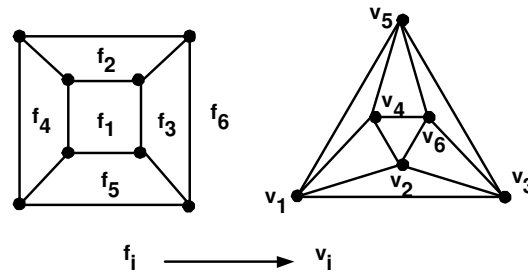


Figura 6.5:

Verifica-se com facilidade que o dual do dual de  $G$  é o próprio grafo  $G$  (desde que  $G$  tenha conexidade maior ou igual a 3).

A dualidade aparece num dos problemas mais famosos, não só da teoria dos grafos, mas da matemática.

## 6.4 O Problema das 4 Cores

Em 1852 Frederick Guthrie, aluno de Augustus de Morgan, trouxe a este um problema proposto por seu irmão Francis Guthrie. Na verdade, tratava-se de uma conjectura, hoje um teorema.

**Teorema das 4 cores.** *Um mapa pode ser colorido com 4 cores.*

Colorir um mapa é colorir as regiões de maneira que regiões fronteiriças não sejam coloridas com a mesma cor. Usando a dualidade podemos formular o teorema em forma de coloração de vértices.

**Teorema das 4 cores formulação.** *Num grafo planar  $G$  tem-se que  $\chi(G) \leq 4$ .*

O grafo  $K_4$  mostra que 4 cores são necessárias, mas serão suficientes? O problema demorou um século para ser resolvido. Em 1976, Appel, Haken e Koch, com o auxílio de 1200 horas do computador mais rápido de sua época, executando mais do que  $10^{10}$  operações computacionais, provaram o teorema. Embora a teoria envolvida seja profunda muitos consideram esta "a mais feia prova da matemática."

As tentativas anteriores são, entretanto, dignas de nota. Kempe utilizou uma técnica (por isso chamada de **cadeias de Kempe**) e apresentou uma demonstração em 1879. Heawood, 11 anos depois, percebeu uma falha sutil na demonstração, que a invalidava. Entretanto, utilizou as cadeias de Kempe para demonstrar um resultado um pouco mais fraco. Começaremos por um lema.

**Lema.** *Num grafo planar há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

*Demonstração.* Já sabemos que  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$ .

Se  $d(v) > 5$ ,  $\forall v \in V$ , então

$$6.n \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Mas num grafo planar temos  $m \leq 3.n - 6$ ; isto é,  $2m \leq 6.n - 12$ . Ficamos com

$$6.n \leq 6.n - 12,$$

o que é impossível.

□

**Teorema das 5 cores.** *Num grafo planar simples  $G$ , tem-se*

$$\chi(G) \leq 5.$$

*Demonstração.* Em todo grafo planar existe um vértice com grau menor ou igual a 5. Podemos decompor o grafo retirando sempre um vértice de grau menor que 5 e recompô-lo colorindo, vértice a vértice. Desta forma, podemos sempre supor que estamos colorindo um vértice  $v$  de grau menor ou igual a 5. Se os vértices em  $N(v)$  estão coloridas com menos do que 5 cores, basta colorir o vértice  $v$ . Podemos então supor que o vértice está cercado por 5 vértices coloridos cada um com uma cor do conjunto  $\{a, b, c, d, e\}$ .

Consideremos o subgrafo induzido pelos vértices coloridos com as cores  $a$  e  $c$ . Se a componente que contém o vértice de  $N(v)$  colorido com  $a$  não contiver o vértice colorido com  $c$ , podemos trocar as cores desta componente: quem está colorido com  $a$  fica colorido com  $c$  e vice-versa. Podemos então colorir o vértice  $v$  com a cor  $a$ .

Se a componente que contém o vértice de  $N(v)$ , colorido com  $a$ , for o mesmo do vértice colorido com  $c$ , existe um caminho de vértices que “cerca” o vértice  $b$  (veja figura 6.6).

Então, tomamos a componente do grafo induzido por vértices coloridos com  $b$  e  $d$ , que contém o vértice de  $N(v)$  colorido com  $b$ . Depois de trocar as cores  $b$  e  $d$  nesta componente, podemos colorir o vértice  $v$  com a cor  $b$ .

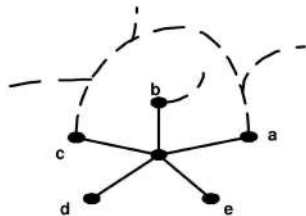


Figura 6.6:

□

### Exercícios

1. Construa o grafo com sequência de graus  $(4, 4, 3, 3, 3, 3)$ :
  - (a) Que seja planar.
  - (b) Que não seja planar.
2. Mostre que um grafo planar com  $\delta = 5$  tem no mínimo 12 vértices. Dê um exemplo de grafo com  $\delta = 5$  e  $n = 12$ .
3. Um grafo é **autodual** se  $G^D$  é isomorfo a  $G$ .
  - (a) Mostre que se  $G$  é autodual então  $2.n = m + 2$ .
  - (b) Um **grafo roda** (notação  $W_n$ ) é o grafo obtido pela adição de um vértice de grau  $n - 1$  a  $C_{n-1}$  (ver figura 6.7). Mostre que os grafos roda  $W_n$  são autoduais.
4. Mostre que um grafo planar  $G$  é bipartido se e só se  $G^D$  é euleriano.



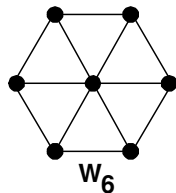


Figura 6.7:

5. Mostre que um grafo planar conexo pode ter suas faces coloridas com 2 cores se, e somente se,  $G$  é euleriano.
6. Mostre que os grafos abaixo (figura 6.8) são isomorfos mas seus duais não são. Este fato contraria o texto do capítulo?

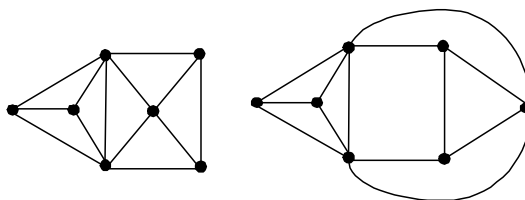


Figura 6.8:

7. A **cintura** de um grafo, denotada por  $g(G)$  é o comprimento do seu menor ciclo. Mostre que num grafo planar temos:

$$m \leq \frac{(n - 2) \cdot g}{g - 2}.$$

Sugestão: adapte a demonstração dos dois últimos teoremas da Seção 7.1.

8. Mostre que é possível obter um grafo planar a partir do grafo de Petersen pela retirada de 2 arestas.
9. Mostre que um grafo não planar tem 5 vértices de grau no mínimo 4 ou tem 6 vértices de grau no mínimo 3.
10. (a) (Resolvido) Mostre que o grafo não planar  $K_{3,3}$  pode ser desenhado sem cruzamentos num toro. E numa esfera, pode?

SOLUÇÃO: A sequência apresentada na figura 6.9 mostra como podemos "recortar" o toro para transformá-lo num retângulo. As setas mostram como podemos passar as arestas pelos cortes.

- (b) Mostre como podemos desenhar  $K_5$  num toro. O teorema das 4 cores vale para o toro?
- (c) Mostre como podemos desenhar  $K_7$  num toro. Você consegue dividir o toro em 7 regiões de maneira que cada uma faça fronteira com todas as outras 6?

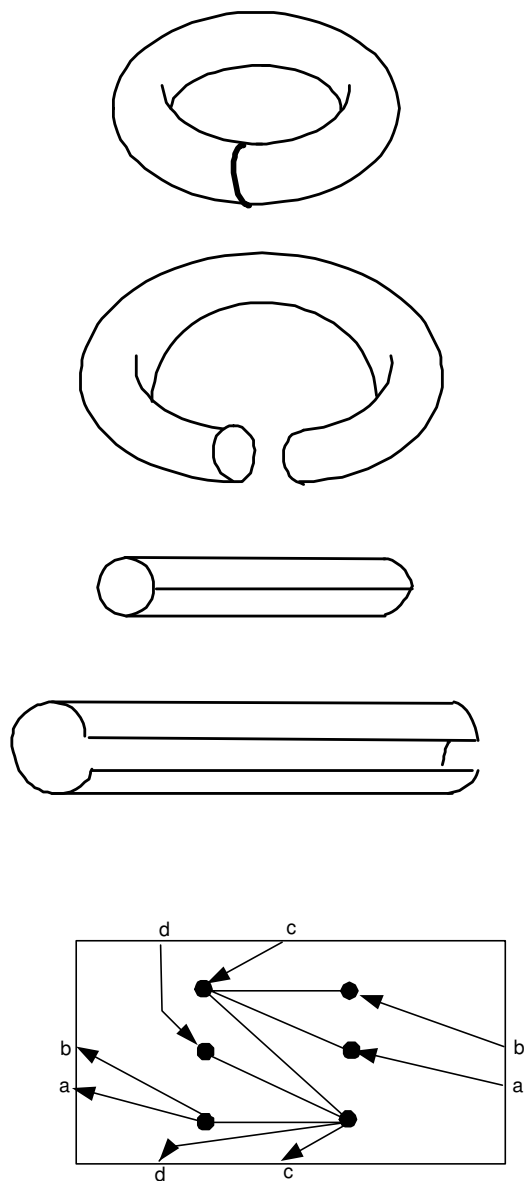


Figura 6.9:

11. Um jogo, usando a figura 6.10 tem as seguintes regras: Dois jogadores escolhem alternadamente uma região para colorir. Duas regiões não podem receber a mesma cor. Quem for obrigado a usar uma quinta cor será o perdedor.

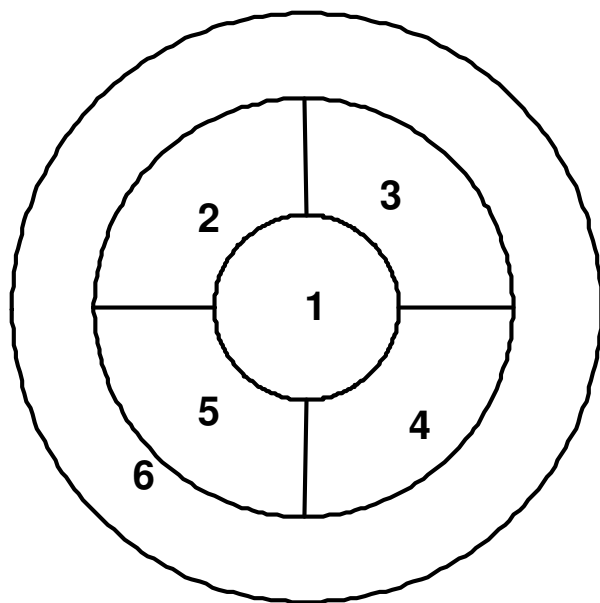


Figura 6.10:

12. Exiba uma coloração desses mapas com o menor número de cores possível.
- Quem será o vencedor – o primeiro ou o segundo jogador?
  - Como modificar o tabuleiro para que a vantagem seja invertida?

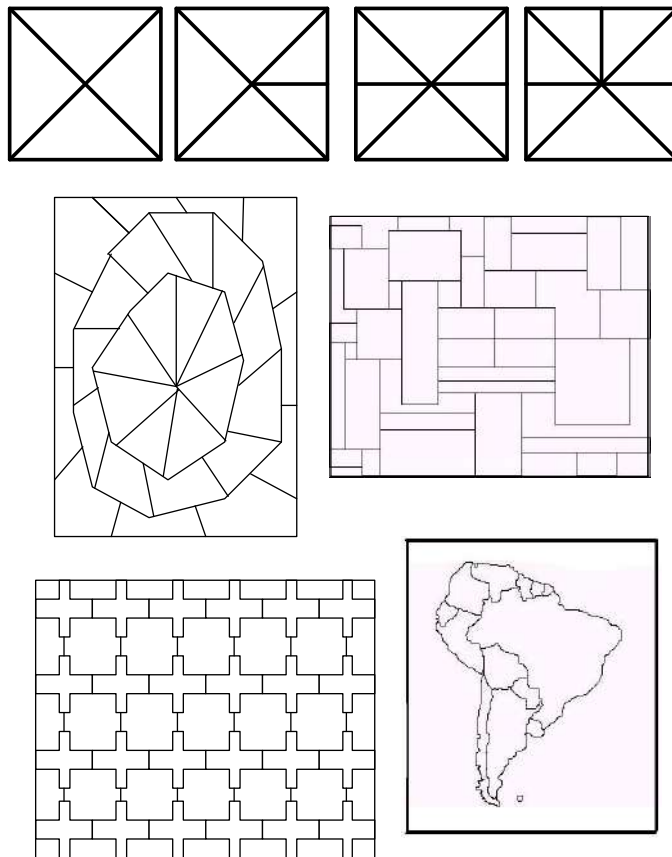
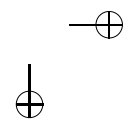
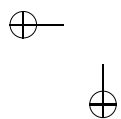
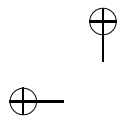


Figura 6.11:



## Referências Bibliográficas

- [1] BOAVENTURA NETTO, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 2 ed, Edgard Blücher (1996).
- [2] CARVALHO, P. C. P. *Contagem*. Apostila 2 do Estágio de treinamento dos alunos premiados da OBMEP, 2006.
- [3] WILSON, R. *Introduction to Graph Theory*. Addison Wesley(1996).
- [4] BALAKRISHNAN, J.; RANGANATHAN, K. *A Textbook of Graph Theory*. Springer-Verlag (1999).
- [5] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.WH. Freeman (1979).
- [6] WEST, D. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall (1996).
- [7] FOURNIER, J-C. *Démonstration simple du théorème de Kuratowski et de sa forme duale*. Discrete Mathematics, **31** (1980) 329-332.